


REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
PLANA VII 28

EXPOSITION

DES OPÉRATIONS FAITES

EN

LAPPONIE,

POUR LA DÉTERMINATION D'UN ARC DU MÉRIDIEN,

EN

1801, 1802 ET 1803;

PAR

Messieurs ÖFVERBOM, SVANBERG, HOLMQUIST ET PALANDER.

REDIGÉE,

PAR

JÖNS SVANBERG,

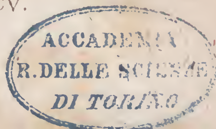
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES À STOCKHOLM, ET DIRECTEUR DE SON OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE; DE LA SOCIETÉ ROYALE DES SCIENCES À UPSALE, ET DE L'ACADÉMIE ROYALE POUR LES SCIENCES MILITAIRES À STOCKHOLM.

ET PUBLIÉE

PAR

L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

À STOCKHOLM,
DE L'IMPRIMERIE DE J. P. LINDH,
M. D. CCCV.



AU ROI.

SIRE,

L'intérêt généreux et éclairé, avec lequel VOTRE MAJESTÉ a accueilli les

Voeux de son Académie des Sciences sur un nouveau mesurage du dégré en Laponie, l'a mise en état d'effectuer cette recherche intéressante, longtems désirée par les savans pour déterminer avec plus de précision la figure de la Terre. C'est à la haute protection, dont VOTRE MAJESTÉ honore les Sciences, qu'elles doivent la découverte, qui en est résultée: elles devront à Votre Auguste Nom, SIRE, une place dans leurs Annales parmi les Grands Souverains qui ont contribué à leurs progrès.

Pénétrée de la reconnoissance la plus respectueuse de la Munificence Royale qu'elle venoit d'éprouver, l'Académie a donné les soins les plus suivis au travail qui en étoit l'objet. Deux de ses Membres, munis de toutes les connoissances requises et d'instrumens les mieux choisis, s'en sont chargés, et l'ont exécuté d'une manière, qui a répondu à toutes les espérances. Ce succès a encouragé l'Académie á donner de toute cette opération une Relation détaillée, qu'elle ose mettre aux pieds de VOTRE MAJESTÉ. *Monument de*

Vos intentions bienfaisantes, SIRE, pour les Sciences, puisse-t-elle l'être de même du zèle avec lequel l'Académie a taché de les remplir, en attestant le profond respect et le dévouement religieux, avec lesquels elle ne cesse d'être

SIRE,
de VOTRE MAJESTÉ

Les très humbles et très fidels sujets et serviteurs,
Le Président, Le Secrétaire et les Membres de l'Académie Royale des Sciences.

Au Lecteur.

En examinant le meſurage du dégré du Méridien fait en Lapponie l'an 1736, je n'ai pas pu m'empecher de concevoir de fortes doutes sur son autenticité. *) En comparant cette mesure avec celles des autres, qui semblent meriter le plus de confiance, je n'ai pas pu que trouver un peu trop grand le saut de la longueur du degré conclue de la mesure en Lapponie à la latitude 66°20′ à celle par exemple, qui a eté faite en France à la latitude de 45°45′, que de celleci á celle de Perou, pour que cette premiere pourroit étre admise comme suffisant à decider cette grande question sur la vraje figure de la Terre. Ajant fait de même de comparaisons des expériances de pendules, qui ont eté ſaites dans de differentes latitudes, je m'ai cru trouver quelques differences dans les aplatissemens de la Terre qu'on en a deduits, et qui s'ecartoient de même de ceux qui etoient deduits des comparaisons entre la mesure de l'an 1736 et celles nommëes. Ne me doutant pas nullement des connoissances, des lumieres et des soins de ces Illustres Geometres et Astronomes, dont les noms se perpetueront

*) Puisque la contrée, ou se fit la mesure du degré l'an 1736, est connue sous le nom de Lapponie, on a voulu retenir cette denomination, quoiqu'elle est en effet une partie de la Bothnie occidentale, la plus septentrionale Province de la Suede.

auſſi longtems que les sciences Mathematiques seront cultivées, et qui ont exécuté cette mesure en Lapponie, pour la faire avec toute l'exactitude desirée, j'ai taché d'expliquer les écarts mentionnés par bien d'autres circonstances, qui auront pu avoir quelque influance sur leurs opérations et observations, et qui n'auront pas eté ni prévues ni attendues ni appercues. Parmi ces circonſtances on doit conſiderer la dureté du climat, ou ces opérations et observations, qui exigeoient la derniere exactitude, devoient se faire, et qui pourroit ainſi causer les plus legeres et presqu' imperceptibles dérangemens, mais qui pouvoient neanmoins d'être d'une consequence bien notable. Il falloit par exemple transporter les instrumens sur de montagnes et de chemins peu pratiqués et couverts d'amas de neige, ou ils auront pu bien être quoique insensiblement derangés d'une maniere ou d'autre. C'êtoit au moins probable, que le secteur d'une longueur d'environ de dix pieds aura pu sur ces routes, par la moindre et presqu' imperceptible inflexion, être mis hors d'etat de donner les observations des latitudes avec cette derniere éxactitude, qu'exigent les observations de cett'espece, ou l'erreur d'une seule seconde produira une erreur d'environ de seize toises sur la longueur du degré, ce qui fera une notable différence dans l'aplatissement, et la quelle deviendra encore plus notable à proportion que l'erreur dans ces observations monteroit à un encore plus grand nombre de secondes, ce qui aura èté bien

difficile d'eviter dans de telles circonstances, et celà d'autant plus que cet' Instrument exige en outre dans son application le dernier soin et la plus grande accuratesse pour servir à son but. Pour examiner cet' Instrument, s'il a eté pendant son transport dérangé quoique trés légerement, mais pourtant assez pour alterer les observations, on auroit aussi eu besoin de l'assistance de quelque habile ouvrier ou intelligent artiste, à quoi il n'etoit pas quelque moien dans cett' occasion. Y ajoutons de même la possibilité du plus leger defaut dans la construction de l'Instrument et dans les divisions de ses parties, qui pourroit etre d'une trés petite consequence dans d'autres occasions, mais de la plus grande dans les observations de cett'èspece. L'ouvrier de cet' Instrument jouit assurement et celà avec bien de droit d'une bonne reputation. Mais on doit pourtant avouer, que l'art de fabriquer de tels Instrumens avec la derniere éxactitude n'avoit pas encore et pour ce tems monté au même degré de perfection que depuis. Entre les causes de l'écart dont j'ai parlé cidevant s'offrit de même la pensée, que quelques chaines de montagnes, situées dans les voisinages de deux points extrémes de l'arc mesuré l'an 1736, auront pu par ses attractions déranger la plomb du secteur dans ces points. Cette possibilité, me parut au moins probable et etoit, pour en faire de recherches, l'un des principaux motifs du premier vojage de Monsieur SVANBERG en Lapponie l'an 1799, comme je le dirai ciaprès.

Aux explications ou possibles ou plus et moins probables de l'ecart nommé, que j'ai allegué on pourroit de même ajouter d'autres, mais aimant mieux ne m'abimer pas a cett' occasion dans de tels debrouillemens je dirai seulement, qu'animé des toutes ces raisons j'ai souhaité depuis longtems, qu'il se presentat quelque conjoncture favorable pour renouveller cette mesure du degré en Lapponie, à fin d'en verifier cette premiere mesure et ainsi effacer toutes les doutes sur son autenticité, ou la corriger. Ces idées, roulées dans mon esprit, se renouvellerent à l'occasion de la nouvelle mesure du degré, que Messieurs DELAMBRE et MECHAIN ont entrepris et executé en France avec autant de zéle que de succés. Les resultats de cette mesure s'accordent assèz bien avec ceux des autres mesures faites au nord de la France, et augmenterent ainsi les doutes que j'avois concues sur l'exactitude de la mesure Lapponaise l'an 1736.

Ajant trouvé en Monsieur SVANBERG, trés habile Geometre Astronome et tout adonné aux sciences qu'il cultive avec un succès trés louable, un zéle pleinement repondant aux vues que j'avois sur une nouvelle mesure du degré en Lapponie, je lui proposai a l'occasion d'un vojage qu'il mèditoit de faire à Torne d'examiner en meme tems tout le local ou se faisoit la mesure de l'an 1736, de chercher les traces de cette mesure autant qu'il etoit possible d'en retrouver, pour en tirer des consequences qui pourroient de quelque

maniere eclaircir les circonstances de cette mesure, ainſi que de prendre connoissance des montagnes situées aux extrémites de l'arc mesuré pour conclure à leurs effets d'alterer plus ou moins la plomb du secteur. Monsieur SVANBERG, d'autant plus propre pour cett' expedition comme il né aux environ de Torne joignit à ses autres connoissances une connoissance des lieux qu'il devoit visiter, et animé du plus parfait zéle pour cette cause accepta très volontiers ma proposition. Je ne tardois donc pas de communiquer à notre Académie des Sciences mes idées sur une nouvelle mesure du degré en Lapponie, à entreprendre pour verifier ou corriger la mesure de l'an 1736, en indiquant de même les propositions que j'avois faites à M:r SVANBERG. L'Académie, ajant pesé les motifs qui me portoient à recommander ce vojage, en etoit d'autant plus contente et satisfaite, que par ce mojen on pouvoit s'attendre à bien d'eclaircissemens sur cette fameuse expedition, et qui pourroient ainsi servir à affermir plus ou moins l'idée sur une nouvelle mesure du degré en Lapponie. C'etoit donc au commencement du printems de l'an 1799 que M:r SVANBERG, pourvu des instrumens necessaires, entreprit ce vojage à Lapponie. Parmi les recherches qu'il fit a cett' occasion on peut envisager celles sur les montagnes situées aux deux points extremes de l'arc mesuré l'an 1736, et les calculs qu'il en a fait pour trouver leurs effets à alterer la plomb du ſecteur, comme bien interessans. Ces recherches deduisant à la conclusion,

que la plomb n'aura pas pu être sensiblement derangé de sa situation par les attractions des montagnes, qui se pourroient trouver dans les environs de cette partie de Lapponie, menerent donc au resultat qu'on ne pourroit pas attribuer l'ecart de cette mesure, dont il est parlé dans les précedens à un tel fondement, mais qu'on auroit à le chercher dans d'autres et tout differentes causes. La différance que M:r SVANBERG trouvoit à l'occasion de ce vojage entre les altitudes des signaux ufités dans la mefure de 1736, les quels Monsieur MAUPERTUIS a decrit dans son Traite sur cette mesure et les veritables, pouvoit bien être de quelque consequence dans la mesure terrestre, lorsqu'on devoit faire les reductions au plan horizontal, mais nullement suffire à expliquer l'écart mentionné.

En pesant toutes les circonstances précédentes il me parut de ne pas rester quelqu' autre que, non obstant tous les obstacles auxquels la mesure de l'an 1736 auroit pu être exposée, dont il a eté fait le rapport cidevant, d'accorder une parfaite autenticité à cette mesure, ou de chercher par une nouvelle mesure dans ces memes lieux, entamée et executée peut être sous un peu plus bons et heureux auspices, de vérifier cette première mesure, ou de la corriger. Dans le premier de ces cas, c'est à dire d'attribuer une pleine confiance a cette mesure, on doit en même tems adjuger une figure irréguliere à notre globe, la quelle hypothese m'a pourtant paru un peu dure

et meriter au moins dans de telles circonstances, ou se devoit trouver cette première mesure, de recherches nouvelles et reiterées avant que d'être pleinement accordée. Ne me confiant pas pourtant sur mes propres lumieres dans une affaire de tant de conséquence, j'ecrivis à plusieurs Geometre-Astronomes etrangers, qui m'honorent de leur amitié et de leur correspondance, en leur communiquant mes pensées sur une nouvelle mesure du degré en Lapponie, et en demandant leur sentimens et leur conseils. Ce qui me flattoit infiniment c'etoit, que dans leur reponses tous unanimement non seulement approuverent mes idées sur le renouvellement de la mesure de l'an 1736, mais aussi m'encouragerent et exhorterent de poursuivre mon projet autant que je le pourrois.

Muni et encouragé de tels suffrages j'osai enfin dans la plus profonde soumission adresser au ROI un mémoire ou je proposai les doutes que j'avois concues sur l'exactitude de la mesure du degré qui se fit l'an 1736 en Lapponie, et l'importance d'une nouvelle mesure dans ces mêmes lieux, entamée et executée avec la derniere exactitude possible, pour en deduire les conséquences à determiner la vraje figure de la Terre avec plus de précision qu'auparavant: À ce Mémoire je joignis la correspondance de mes Amis etrangers, qui tous dans leur lettres avoient temoigné leur approbation de mon idée sur le renouvellement de la mesure du degré en Lapponie

l'an 1736, de même que l'empressement avec lequel ils souhaitoient l'exécution de ce projet. SA MAJESTÉ, honorant les Sciences de sa protection et tout zélée pour leur accroissement, daigna trés gracieusement accueillir mon Mémoire, et aprés que son Académie des Sciences, pour obeir à ses ordres de donner son avis sur mon projet, l'avoit appujé comme tout fondé et contribuant aux avantages, que j'avois marqués dans mon Mémoire, il plut à SA MAJESTÉ d'ordonner sous le 17 Fevrier l'an 1801 qu'une nouvelle mesurage du degré en Lapponie, comme je l'avois projetté, seroit entamé et executé au plutôt, SA MAJESTÉ ordonant en même tems généreusement que les frais, qu'exigeroit cett' expédition, seroient fournis par l'etat.

Mon age avancé ne me permettant pas de prendre part moi même dans l'exécution de mon projet, je me felicitois de trouver dans les personnes de Messieurs ÖFVERBOM, Premier Ingenieur-Geographe au Bureau d'arpentage, et cidevant nommé SVANBERG, Directeur de l'Observatoire Astronomique de l'Academie Rojale des Sciences, tous les deux Académiciens, toutes les qualités necessaires pour exécuter une expédition de cett' importance. Aux connoisances Mathematiques et Astronomiques bien étendues ils joignent aussi des talens particuliers pour la pratique et pour la méchanique des instrumens et d'autres attirails d'une espéce semblable, connoissances si utiles et si indi-

spensables dans de telles occasions. Leur age leur santé et vigueur repondirent aussi à ces facultés de leur esprit. Tout zelés pour cette belle cause ils etoient préts d'affronter et combattre toutes les difficultés et perils, auquels ils seroient exposés dans ce rude climat, ou il leur faudroit dans un froid souvent excessif se trouver et continuer leur operations sur les glaces et de neiges. Instruits et animés de la sorte, et aprés que SA MAJESTÉ avoit gracieusement approuvé le choix, que Son Académie des Sciences avoit fait de ces deux savans pour cett' expédition, ils partirent de Stockholm au commencement du mois d'Avril l'an 1801 et pour Lapponie.

Le but de ce premier vojage de Messieurs Öfverbom et Svanberg etoit d'examiner le local ou les operations de la mesure se feroient, et combien loin on pourroit dans ces pais incultes pousser la svite des triangles pour obtenir le plus grand arc possible; et determiner ainsi les deux points extrémes de cet arc comme à Mallörn et à Pahtavara: de faire batir les signaux et choisir les stations ou il faudroit poser ces signaux; de faire batir les observatoires à Mallörn et à Pahtavara pour y faire les observations de latitudes, et en general de faire toutes les recherches possibles qui pourroient avoir quelque rapport plus ou moins aux operations qui restoient, et préparer tout ce qui pourroit contribuer à leurs heureuse issue. Ajant ainsi expédié tout ce qui motivoit ce premier vojage ils re-

tournerent à Stockholm en y arrivant à la fin du mois d'Octobre de la même année à fin de se préparer au dernier vojage pour entamer et exécuter la mesure elle même.

Comme les operations, qui restoient à faire l'année suivante, etoient d'une telle nature, que les Messieurs ÖFVERBOM et SVANBERG pourroient bien avoir besoin de quelqu' assistance, âfin que rien ne manqueroit pas à la reussite de l'entreprise, je proposai à l'Académie des Sciences de joindre à eux les Messieurs HOLMQUIST, Adjoint dans les Math matiques à l'Université d'Upsale, et PALANDER, Maitre enseignant dans les mêmes Sciences à celle d'Âbo, tous les deux bien versés dans ces Sciences, ce qui fut approuvé.

Rien ne manquoit alors, pour que les quatre Mathematiciens nommés n'entreprendroient pas le second vojage à Lapponie, pour continuer et enfin terminer l'expédition commencée, que l'heureuse arrivée du cercle Répétiteur de BORDA, l'unique Instrument peut être à emplojer dans de telles occasions avec un succes desiré, et qu'on attendoit avec bien d'impatiance de jour en jour à la fin de l'année 1801. Dans la vue d'obtenir le renouvellement de la mesure du degré en Lapponie l'an 1736, je proposois à notre Académie des Sciences dejà l'an 1800 de faire faire chez Monsieur LENOIR à Paris cet' Instrument, ce que l'Académie approuvoit et accordoit. J'en ecrivis

donc de la part de l'Académie à Monsieur DELAMBRE à Paris, en le priant d'avoir la bonté de se charger de cette commission. Monsieur DELAMBRE, aussi zélé pour la bonne cause qui occasionnoit ma demande, s'y offrit trés honnetement en me mandant dans sa reponse qu'il en avoit donné la commission à M:r LENOIR, et qu'il esperoit, que l'instrument seroit achevé à tems pour être transporté à la Svede avant la fin de 1801. Cet' Instrument, d'autant plus précieux qu'il etoit fabriqué sous l'inspection de Monsieur DELAMBRE, arrivoit enfin à Stockholm les derniers jours de l'année 1801. Ce que je pouvois à cett'occasion envisager comme un bon augure pour notre expédition c'etoit, que la navire, qui portoit l'Instrument, passoit la mer de Nord et la Baltique dans le mois de Novembre de cett année, et arrivoit à Stockholm sauf et sans dommage, tandis que les ouragans frequens, qui regnerent alors sur ces eaux, firent périr une grande quantité des batimens. Avec le cercle de BORDA Monsieur DELAMBRE voulut bien envojer aussi le métre Francois et la toise, tous les deux travaillés avec le dernier soin, que l'Institut National des Sciences et des Arts avoit donné en présent à notre Académie des Sciences, et desquels on ne pouvoit pas se passer pour faire les réductions dans les lieux mêmes, et pendant les opérations, de nos mesures et de nos regles.

Pourvus de ces Instrumens et de tous autres necessaires, nos quatre Mathematiciens partirent dans le

commencement du mois Janvier l'an 1802 pour Lapponie, d'ou ils ne revinrent que dans le mois de Mars 1803, aprés avoir rempli tout ce qu'on avoit de se promettre de leur connoissances, de leur zéle et de leur infatigabilité, dont le Lecteur de la Relation seivante sera, comme je l'espere, suffisament instruit.

MELANDERHJELM.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE
PAR
L'AUTEUR.

Une connoissance approfondie des dimensions du globe que nous habitons a été de tout temps l'objet de la curiosité de l'esprit humain, et les Astronomes Géomètres s'en sont occupés dés la première aube même des sciences. L'histoire des efforts multipliés, qu'on a fait à différentes époques pour y atteindre, se perd dans la plus haute antiquité; et l'idée même, de poser là dessus les premiers fondements de tout un système métrique, est si peu nouvelle, qu'en effet elle appartient originairement à un peuple, dont il-y-a des siècles que les Annales du monde on perdu tout souvenir. ARISTOTE fait mention d'une espèce de stades qui avoient eté la cent millième partie de la distance de l'équateur au pôle, et qui de temps immémorial avoient été l'étalon prototype des mesures linéaires de l'Asie; Les modules qui furent dans la suite en usage chez les anciens Perses, les Egyptiens et les Chaldéens, s'en déduisent facilement et par des rapports extrêmément simples; et, en partant de la determination de la coudée mesurée sur le Nilomètre, on en trouve la valeur $= 100^{\text{metres}},1025$,

Mr FRERET a montré l'ancienneté de cette coudée, et qu'elle remonte même au-delà des temps de SESOSTRIS; et, si l'on considère le peu de différence du Stade qui en découle à l'hectomètre de France, on n'en sauroit méconnoitre l'idée fondamentale, en même temps qu'on ne sauroit qu'avoir une haute idée de l'avancement du peuple exécuteur dans les sciences Physico-Mathématiques. L'histoire en a perdu tout souvenir, et son existence n'est attesté que par une foule de débris, preuves évidentes de sa grandeur et de sa gloire, autant que de son génie, et de l'influence qu'il a eû sur la civilisation des peuples qui sont venus aprés lui.

La première opération ayant pour objet la détermination de la Grandeur de la terre, et dont une connoissance détaillée nous est parvenue, est celle qui fut exécutée en Egypte par Eratoshène sous le règne des Ptolémées; mais les sciences Mathématiques, dans l'état de commencement où elles étoient de son temps, n'avoient pas encore atteint le point d'élévation qu'il falloit pour entrevoir toute l'étendue du problème dont il s'agit; ce n'étoit alors qu'une question isolée, dont en effet la solution devoit paroitre bien satisfaisante pour l'esprit humain, mais qui n'avoit point de liaison intime avec les autres connoissances élémentaires dans la Physique ou dans l'Astronomie, et ce n'est que du temps de HUYGENS et de NEWTON qu'il est devenu l'élément d'où dépend en partie la Justesse de nos théories les plus abstraites, et dont

par conséquent la connoissance nous éclairerera sur les points les plus essentiels, et sur les premiers principes des sciences Physico-Mathématiques; ensorte que de nos jours on peut sans restriction lui attribuer le vrai caractère de partie constituante dans un corps organique, celui de répandre une nouvelle lumière sur toutes les branches de l'Astronomie Physique, et d'en recevoir à son tour, de manière qu'il soit même assez exactement déterminé par l'ensemble de tous les autres phénomènes de cette science.

L'expérience de tous les Jours nous apprend, que si l'on attache un fil quelconque par l'un des ses bouts à un point fixe, et par l'autre à un corps qui se meut autour de ce point, il en résultera pour le fil une force de tension, qui sera d'autant plus grande que le mouvement sera plus rapide. HUYGENS peu satisfait d'un théorème si vague fut le premier qui en essaya d'assujetir les effets à un calcul rigoureux; il commenca donc par en bannir tout empirisme, en le déduissant des propositions de Géométrie les plus élémentaires, et par ce fait il fut effectivement le fondateur des sciences Dynamiques, dont l'état actuel d'étendue et de profondeur est si capable d'entretenir des idées imposantes de l'empire de l'esprit humain, et de la hardiesse qu'il a eû de s'assujetir en quelque sorte l'univers, ayant pénétré jusqu'au premier principe qui en règle les mouvements et ayant eû la persévérance de le poursuivre dans cette foule de détails qui en découlent immédiatement. Les premiers résultats du théorème

annoncé par HUYGENS étoient l'inégalité de la pesanteur sous différentes hauteurs du pôle; d'où il falloit ensuite, que la terre devoit, en vertu de son mouvement diurne, avoir une espèce de protubérance vers l'équateur, tandisqu'elle devoit être un peu applatie vers les deux poles. Ainsi la diminution de la pesanteur que la force centrifuge produit vers l'équateur est $\frac{1}{289.366}$ de celle qui est dûe à toute l'attraction de la terre; et si on suppose avec HUYGENS, que la force de la pesanteur réside toute entière dans le centre de la terre, l'applatissement qui en résulte devient $= \frac{1}{578.73}$, c'est à dire que le rapport du rayon de l'équateur à la moitié de l'axe de rotation, sera celui de 577.73 à 578.73. Ces découvertes étoient les précurseurs de l'hypothèse que NEWTON proposa ensuite d'une attraction universelle, hypothèse qui a changé la face de tout le système de nos connoissances dans l'Astronomie, et d'où en effet il faut dater l'époque à jamais memorable de la naissance des sciences Physico-Mathématiques; Depuis ce temps là le problème de la figure de la terre est devenu un des plus compliqués, et les plus grands Géomètres, qui ont illustré le siècle où nous avons vécu, s'en sont occupés, en ayant épuisé toutes les ressources de l'analyse la plus transcendante pour en venir à bout; chaque atome n'étant plus sollicité par une seule force finie, mais par une infinité de forces infiniment petites, qui tendoient toutes à des points différents, et dont on ignoroit la direction et la Grandeur de la résultante, tant que la Figure de la terre étoit inconnue elle même, la quelle

dépendoit à son tour de toutes les attractions réunies des atômes intégrantes. En conséquence de cela, NEWTON ne tarda pas à remarquer, que l'hypothése de HUYGENS d'une force unique tendante au centre de la terre, étoit équivalente à celle d'y supposer une densité infinie. Il crut donc, qu'il falloit y renoncer, et qu'on s'éloigneroit moins de la vérité en supposant que les entrailles de la terre sont composés d'une matière parfaitement homogène; de plus en supposant avec lui, que la surface de la terre soit celle d'un Ellipsoide de révolution, dont l'axe de la terre soit le petit axe, il en résulte $\frac{1}{231.78}$ pour la valeur de l'applatissement, qui doit avoir lieu, pour qu'il y ait équilibre dans cet Ellipsoide supposé fluide. Tout ceci, et la légitimité de l'Hypothèse de NEWTON fut démontrée pour la première fois par MACLAURIN, avec cette rigueur qui caractérisa tous ses ouvrages, et qui, tant que le gout des sciences exactes ne sera pas encore tout à fait éteint dans une race énervée, assurera à son Traité des Fluxions la gloire de la production la plus sublime de l'esprit constructif des anciens Géomètres. Mais ni lui, ni NEWTON ne peuvent être censés avoir donné une solution complète du probléme, dont il s'agit, puiqu'ils n'ont fait, qu'avancer une hypothèse, dont en effet ils ont prouvé la légitimité, mais qui pourroit bien avoir lieu comme solution particulière parmi une infinité d'autres. CLAIRAUT est véritablement le premier qui en a saisi toute l'étendue, et depuis ce temps là tous les Géomètres du premier rang se sont occu-

pés de ce fameux problème; de sorte, qu'il a encore produit une espèce de révolution dans les Mathématiques pures, en ayant donné naissance à de nouvelles ressources de la plus haute Analyse. Voici le précis des résultats de ce que la Géomètrie a été capable de produire dans cette matière.

Le minimum de la période de rotation, avec la quelle une masse fluide et homogène, et d'une densité égale à la densité moyenne de la terre, puisse être en équilibre est $= 0,^{J}1009$ ou $2^{h}25' \, 17''\frac{3}{4}$; le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur, qui y répond, est celui de 1 à 2,7197. Pour toute autre période, moindre que celle dont nous venons de faire mention, la masse fluide changeante toujours d'Ellipticité, sera de plus en plus applatie, ce qui lui fera rallentir son mouvement de rotation, jusqu' au terme où l'équilibre puisse enfin avoir lieu. Ce minimum, au dessous du quel l'équilibre cessera d'être possible, est rélativement à la Masse du Soleil $= 0,^{J}19987$, à celle de la lune $= 0.^{J}11713$, à celle de Jupiter $= 0.^{J}19865$, à celle de Saturne $= 0,^{J}31255$ et à celle d'Uranus $= 0,^{J}21493$. Partout les observations font voir, que la Nature ne passe jamais les limites que prescrit la théorie de la pesanteur universelle; et on peut même regarder le Géomètre comme une espèce de législateur de l'univers, dont l'Astronome observateur ne fait que lui rapporter la soumission aux lois, dont l'observance selon lui est la condition unique, sans laquelle il ne sauroit y avoir de stabi-

lité dans la Nature. D'aprés ces lois, et en supposant toute autre durée de rotation plus grande que la limite indiquée, il-y-a toujours deux figures Elliptiques, et non davantage, qui satisfont à l'équilibre; et, en s'arrètant au cas particulier de la terre, le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur est dans le sphéroide le plus applati comme 1 à 6805, et dans le sphéroïde le moins applati comme 230.7 à 231.7. Tous les deux sont également possibles, de sorte que, pour savoir quel est celui qui a effectivement lieu dans la nature, il faut enfin recourir à l'observation. Or les opérations les plus grossières suffisent pour faire rejeter le premier; puisqu' en le supposant, la surface de la terre s'écarteroit très peu de la figure d'un plan, au lieu que tous les phénomènes nous ramènent incessament à celle d'un sphère. On a donc adopté $\frac{1}{231.7}$ pour la valeur de l'applatissement, aprés quoi on a encore déterminé la variation de la pesanteur, qui en vertu de cette valeur doit avoir lieu sous différentes hauteurs du pôle, et delà les variations en longueur du pendule à secondes qui en découlent immédiatement. En conséquence de cela on a trouvé, qu'un pendule qui bat des sécondes décimales à l'équateur doit être augmenté de $3^{mm}.205$ pour en faire de même au pôle. Or cette augmentation est d'aprés les observations égale à $4^{mm}.208$, ce qui différe de la valeur précédente de $1^{mm}.003$; enfin cette différence ne sauroit ètre attribuée à quelque erreur dans les observations, puisque de quinze expériences qu'on a fait exprés, il-n'-y-en-a aucune qui en diffère de plus

d'un septième du millimètre. L'Ellipticité qui rend le plus grand de ces écarts un minimum est $= \frac{1}{322.48}$ et l'Ellipsité la plus vraisemblable (c'est à dire celle, qui rend la somme des erreurs commises en sens positif égale à celle des erreurs commises en sens négatif, et la somme de toutes les erreurs prises positivement un minimum) est $= \frac{1}{336.78}$; de sorte qu'en faisant la pesanteur sous l'équateur $= 1$, la force centrifuge due au mouvement de rotation $= \varphi$, et l'applatissement ou $\alpha = n\,\varphi$, la valeur d'en sera d'après les expériences du pendule à secondes $= 0.85921$. Or ce cöefficient ne seroit que 0,5 si la terre étoit d'une densité infinie vers le centre, tandisqu'en supposant qu'elle fut composée d'une matière parfaitement homogène, il seroit $= 1,25$; donc la terre n'est pas une masse homogène, mais d'une densité qui va toujours en augmentant depuis la surface jusqu' au centre. Ce résultat est parfaitement d'accord avec ce que nous savons d'ailleurs qu'il a lieu pour la planète de Jupiter, dont je vais ici tracer un tableau succinct, afin de mettre par là le Lecteur en état d'en juger par lui même.

Outre la voie des expériences faites exprès, il-y-en-a encore une autre, par la quelle on peut arriver à la longueur du pendule à secondes sous l'équateur, et qui dépend uniquement d'une théorie approfondie de la lune. Les résultats obtenus par des moyens qui sont en apparence si hétérogènes, ne diffèrent entr'eux que d'environ le treizième d'un milli-

mètre; cela prouve la légitimité de tout le procédés, en même temps qu'il fait présumer l'exactitude de la valeur obtenue dans le cas même, où il n'-y-auroit aucun moyen de la vérifier par des mesures immédiates. C'est là ce qui arrive à la planète de Jupiter, dont néanmoins le diamètre apparent de l'équateur, et les élongations du quatrième des satellites, mesurées avec exactitude, et comparées avec le tems périodique de celuici, et la durée de rotation de la planète principale autour de son axe, nous mettent en état d'assigner le rapport de la force centrifuge à la pesanteur qui a lieu sous son équateur, ce rapport est égal à celui de 0.077631 à l'unité; et, si l'on supposoit que toute la planéte fut une masse homogène, le rapport de l'axe au diamètre de l'equateur qui en résulte seroit comme 1 à 1,10967, au lieu qu'en lui supposant une densité infinie vers le centre, ce rapport seroit comme 1 à 1,03882 Or les observations de micromètre font ce rapport. = 1 à 1.07274, et la thèorie de la pesanteur comparée à celle du mouvement des noeuds et des Péri-Joves des satellites de Jupiter le font = 1 à 1.0748, ce qui ne s'écarte pas sensiblement de la valeur précédente, mais qui paroit pourtant mériter la préférence vue la rapidité des mouvements qui en dépendent; toutefois prenant le milieu, on aura 1 à 1.07376 pour la valeur de ce rapport, ce qui s'écarte considérablement de ce que nous avons vû devoir exister dans le cas de l'homogénéité; celà s'approche encore du résultat de l'hypothése d'une densité infinie vers le

centre, d'où résulte la propriété si remarquable, que cette planète a de commune avec la terre, savoir celle d'être plus dense vers le centre. L'applatissement qui répond à ce dernier rapport est $= 0{,}068693$, et par conséquent le coëfficient n (que nous avons vu être $= 0.85921$ relativement à la terre) sera $= 0.88487$ relativement à Jupiter, dont le peu de différence de la valeur précédente justifie la supposition, qu'ils soient effectivement les mêmes pour les deux planètes; ce qui étant supposé, on aura $\frac{1}{327.02}$ pour la valeur de l'applatissement de la terre déduite de la Théorie de Jupiter et de ses satellites. Ce résultat est incontestablement un des plus remarquables, en faisant voir qu'un phénomène, appartenant à une planète, qui est toujours éloignée de nous à une distance de plus de cent quarante millions de lieues, peut nous procurer des éclaircissements sur la figure du globe que nous habitons, et sur la constitution intérieure des parties intégrantes dont il est composé; c'est la preuve la plus éclatante de la profondeur de la Géomètrie moderne, en mettant au grand jour l'immensité des avantages qu'en peut tirer le philosophe de la nature, lorsqu'il en sait mettre au profit toutes les ressources. Mais l'Astronomie en contient une quantité de faits semblables, dont je n'ai voulu faire qu'indiquer celuici en passant; et je vais continuer l'esquisse, que j'ai commencé d'un tableau, de ce que les sciences Physico-Mathematiques ont produit dans cet article; afin de mettre par là sous les yeux du Lecteur, ce qui nous a resté encore à y faire,

et ce qui a été long temps l'objet des souhaits de ceux des Astronomes, dont les bornes de leur lumière, ne les ont empêché d'embrasser toute l'étendue de ce problème, et d'en saisir les relations avec les différentes branches de nos connoissances physiques, dont les premiers principes même en sont modifiés si essentiellement.

Le mouvement du pôle de l'équateur, généralement connu sous le nom de précession des équinoxes, dont la période est de 25773 ans, et par lequel l'aspect du ciel étoilé, qui de nos jours répond à une époque quelconque de l'année, se change continuellement, de sorte qu' après intervalle de 12887 ans il soit même tout à fait opposé à ce qu'il est maintenant; ce mouvement, dis je, tient à l'ellipticité de la surface de la terre, dont la protubérance vers l'équateur, jointe aux attractions du soleil et de la lune sur celle-là, est la cause unique de ce phénomène; l'équation qui en définit la rapidité est une fonction composée de cette vitesse même, du rapport de l'axe au diamètre de l'équateur, et de la fonction qu'on suppose être proportionelle à la densité des entrailles de notre globe à différentes distances de son centre. Deux quelconques de ces éléments étant supposés connûs suffisent toujours pour déterminer le troisième, de sorte qu'en partant de la précession annuelle moyenne que les observations font $= 155.''2$, et supposant en même temps que la Terre soit partout également dense, l'applatissement qui en résultera sera $= \frac{1}{304}$; La nature de la fonction, d'où

dépend cette valeur, nous apprend encore qu'elle doit être diminuée par la considération que les densités vont en augmentant vers le centre, d'où il s'ensuit que celleci n'est que la limite du maximum qu'elle ne sauroit passer. En effet les phenomènes de la précession et de la nutation à eux seuls ne suffisent pas pour déterminer en dernier ressort la valeur de l'applatissement; mais la connoissance même des limites nous est déja du plus grand intérêt, en nous conduisant à des résultats peu s'en faut identiques avec ceux qu'on a déduit de principes tout à fait hétérogènes.

L'accord des résultats que nous venons de rapporter continue encore d'être le même en comparant les observations des occultations d'une étoile par la lune faites en différents lieux de la Terre, dont le rapport fini de son rayon à la distance de la lune ne les fait avoir lieu au même instant pour tous les différents observateurs. TRIESNECKER, qui s'est occupé beaucoup de ces sortes de calculs, et qui en a comparé un grand nombre avec les observations, en a conclû $\frac{1}{329}$ pour la valeur de l'applatissement de l'Ellipse génératrice de la surface de la terre. Or les résulsultats obtenûs par cette voie sont les plus indépendants de toute hypothése, de sorte qu'en supposant que les observations, d'où on les a dérivé, fussent dégagées de toute erreur, ils mériteroient par cette raison d'être adopté préférablement à tous les autres; non obstant cela, les Astronomes ont été unaninement d'accord, qu'il ne faudroit y acquiescer, vue l'influ-

ence des petites erreurs qu'on ne sauroit éviter dans les observations; et que, pour terminer en dernière instance toute dispute concernante la figure de la terre il n'y-avoit d'autres moyens que d'en mesurer des parcelles de l'arc du méridien prises à différentes hauteurs du pôle; ce qui étant fait, on auroit le rayon de courbure qui répond à ces latitudes. Dans cette vue il-y-a eû plusieurs expéditions célébres, et lorsqu'on en a comparé les résultats entr'eux ce n'est pas sans la plus grande surprise qu'on a vû tout d'un coup disparoitre l'harmonie qui avoit regné jusqu' alors; puisque non seulement il n'-y-a aucun moyen de les accorder avec ceux que nous venons d'exposer dans les précédents, mais encore ils sont tellement opposé l'un à l'autre, qu'en comparant la mesure du dégré de Lapponie faite en 1736 avec celle qui a été éxécutée nouvellement en France par MECHAIN & DELAMBRE, il en résulte $\frac{1}{146}$ pour la valeur de l'applatissement, au lieu qu'en comparant cette dernière avec celle du dégré de l'équateur exécutée en Pérou par BOUGUER & CONDAMINE, il n'en résulte que $\frac{1}{334.3}$. Or de quelque manière que l'on ait combiné les différents dégrés qu'on avoit déja mesuré, il a été impossible (en supposant toujours à la terre la figure d'un Ellipsoïde de révolution) d'éviter une erreur de $189^{m}.4$ pour le moins, dans les mesures de Pensylvanie, de Cap de Bonne-Espérance et de Lapponie; encore l'applatissement qui en a résulté, est il $= \frac{1}{277}$, ce qui s'éloigne considérablement

de la limite qu'on a trouvé d'ailleurs $= \frac{1}{304}$; de plus l'erreur de 189^m4 étant la plus petite de toutes celles qui peuvent être admises, et par cela même infiniment peu probable, on a regardé comme l'Ellipticité la plus vraisemblable celle, qui ait rendu la somme des erreurs commises en sens positif, égale à celle des erreurs commises en sens nègatif, et la somme de toutes les erreurs prises positivement un minimum, ce qui a donné $\frac{1}{312}$ pour la valeur de l'applatissement, et 336^m2 pour celle de l'erreur correspondante du dégré de Lapponie; cette erreur a paru beaucop trop grande pour pouvoir être admise, ayant passé la limite de celles dont il semble que les observations soient susceptibles, de sorte qu'on a enfin commencé à soupconner que la terre pouvoit bien ne pas ètre un Ellipsoide, ni mème quelque autre solide de révolution. (*)

*) Les Astronomes ont soupçonné, il-y-a long temps, que les attractions étrangères (telles que celles des montagnes dont tout ce pays est hérissé. ou mème celles des alpes qui séparent la Norvège d'avec la Suède) pourroient bien avoir causé quelque dérangement dans le fil à plomb du secteur employé l'an 1736. L'Académie des Sciences, partageant avec tout le reste du monde savant l'intérêt pour cette grande question, me manda donc en 1799, lors de mon projet d'un voyage à faire à Torneå, où je suis né, d'aller en mème temps visiter toutes les stations fréquentées par les Académiciens de France pour en tirer des inductions plus ou moins fortes relativement aux circonstances locales qui pouvoient s'y rapporter. J'ai déjá communiqué dans les mémoires de l'Académie, le peu de réflexions que me suggéra ce voyage, et qu'en effet on peut distribuer en trois ordres, le tout se réduisant à une discussion des effets de l'omission du nivellement de la base, des réfractions terrestres, et de l'attraction des montagnes. Quant aux deux premiers, ils ne pouvoient ètre en vertu de leur nature mème, que de très peu de consequence; et l'altération du fil à plomb, qu'on pou-

Tel étoit l'état du problème de la figure de la terre, lors du commencement du siècle où nous vivons; savoir d'une part la Théorie de l'attraction universelle, et l'ensemble de tous les phénomènes de l'Astronomie Physique, exigeoient $\frac{1}{320}$: éme (plus ou moins) d'applatissement pour l'Ellipse génératrice de la surface de la terre; de l'autre, il n'y-avoit aucun moyen d'y concilier les mesures faites en differents lieux, et par des Astronomes, dont la réputation sembloit devoir inspirer la plus grande confiance; enfin, de toutes ces mesures, aucune ne s'écartoit autant que celle du dégré de Lapponie. En effet l'Astronome observateur ne révoquoit point du tout en doute la solidité des principes, sur les quels le Géomètre fonda ses assertions, et ce n'étoit que la difficulté, d'expliquer 40 secondes ou plus d'erreur dans les observations, qui le rendit suspens. Ainsi tous ceux, qui travailloient pour les progrés des sciences Physico-Mathématiques, s'étoient déclarés depuis long tems, et d'une voix unamine, pour l'importance d'une nouvelle mesure faite aux environs des mêmes lieux, où celle de 1736 avoit été exécutée; une telle opération devant, ou confirmer les résultats, que nous avions déja obtenu d'ailleurs, ou même (en constatant celle de 1736) nous éclairer sur les altérations a faire aux premiers principes qui avoient fondé ces résultats;

voit attribuer aux attractions étrangères des montagnes placées au-dessus de la surface de la terre, ne sauroit avoir été, que très insensible, ou même tout à fait nulle; de sorte, que de ce côté on ne pouvoit rien conclure pour diminuer le poids des opérations de 1736.

Telle est la cause du zèle avec lequel les Astronomes de tous les pays se sont intéressé pour cette expédition.

Monsieur MELANDERHJELM qui occupe lui même un rang distingué parmi les Géomètres actuellement vivants, et qui du temps de sa jeunesse s'est appliqué beaucoup à ce problème, aprés l'avoir agité au sein de l'Académie des Sciences, porta enfin au trone le souhait des Astronomes, et l'accroissement qui résulteroit pour l'Astronomie physique d'une nouvelle mesure faite aux environs du cercle polaire au-delà de Torneå. L'Académie des Sciences appuyant de son crédit le projet d'une telle entreprise, et SA MAJESTÉ LE ROI, l'ayant écouté favorablement, il daigna même en faire tous les frais, en nous chargeant M:r ÖFVERBOM et moi de l'exécution, et nous enjoignant de l'entreprendre au plutot. Aussi les Ministres éclairés, qui ont le plus d'accés auprés de SA MAJESTÉ, ont ils fait voir tant de zèle pour la réussite de cette expédition, qu'en effet je l'ai cru de mon devoir, de leur témoigner ici une reconnoissance, qui ne périra, qu' avec la science elle même; et il m'est d'autant plus doux de m'arrêter à cet accueil dont l'Astronomie est favorisée près du trône, qu'il est encore une marque éclatante de l'appui, qu' en doivent espérer tous les Mathématiques; enfin l'uniformité des résultats, qui, par des voies différentes, conspirent tous à prouver la même chose, est le caractère le plus distinctif d'une science parfaite;

et tout Suédois, qui s'intéresse aux progrés des sciences en général, se rappellera toujours avec un sentiment de plaisir, que c'est à la Munificence d'un de ses Rois, qu' il doit cette uniformité. Mais je crains d'anticiper sur les résultats de toute l'expédition, et je vais reprendre le fil de ma narration.

Nous partimes, donc de Stockholm à la fin du mois d'Avril l'an 1801, afin que nous puissions ètre à Torneå le 24 du May suivant, pour y observir le passage de la Lune par dévant l'épi de la Vierge, et nous y arrivàmes effectivement le 18 de ce mois; mais le phénomène, qui avoit haté notre départ de Stockholm, nous manqua tout à fait, le ciel se couvrant au moment mème, où l'immersion devoit avoir lieu, et après que tous les préparatifs étoient déja en parfait ordre, de sorte qu'on avoit mème commencé à compter sur la pendule. Or cela nous étoit d'autant plus fâcheux qu'il nous avoit fallû surmonter les plus grandes difficultés en passant par le Medelpad et l'Angermannie, dont les grandes routes sont extrêmement impraticables dans cette saison, où il commence ordinairement á dégèler. Encore cet accidént nous enléva-t-il la plus belle occasion d'avoir la longitude de Torneå, et celle de toute notre méridienne déterminée avec une grande précision, ce quï nous fut désormais impossible par tout autre moyen; de sorte, que relativement à ce point, nous n'avons pu observer que deux éclipses du premier des Satellites de

2

Jupiter (pendant que nous étions à *Pahtavara)*, dont les instants de l'évanouissement sont encore marqués comme fort douteux, vù le grand froid, où se faisoient ces observations; ce qui fit, que les exhalaisons, qui sortirent de l'oeil, se gélèrent dans l'instant même, ensorte qu'il falloit toujours essuyer l'oculaire de tems en tems avec un mouchoir, pour empêcher par là, qu' étant tout couvert de brumes il ne fit trop tot évanouir le satellite. L'objet principal de ce premier voyage étoit celui, de choisir les points les plus propres aux opérations géodesiques, et d'y faire dresser les signaux convénables, enfin de déterminer jusq'où pouvoit s'etendre notre méridienne, tant vers le Sud que vers le Nord, et de faire batir les observatoires qu'il falloit vers les deux extrémités de l'arc à parcourir. Tout cela fut exécuté avant l'automne 1801, après quoi nous retournames à Stockholm, où nous attendions le cercle répétiteur de BORDA, qui devoit arriver de Paris, et qui venoit d'être exécuté par LENOIR sous les yeux de DELAMBRE; Celuici n'arrivat qu' au commencement du mois de Décembre, et l'Académie des sciences considérant la multiplicité des détails, que cette opération exigéroit, et l'extréme délicatesse qu'il y falloit partout employer, nous associa encore MM:rs HOLMQUIST et PALANDER; ensorte, que dans tout ce qui suivra, il faut toujours nous regarder dorénavant comme ayant été quatre coopérateurs.

Nous partimes donc tous les quatre pour Torneå, au commencement de Janvier l'an 1802 et après y être arrivés nous n'y séjournâmes que le peu de Jours qu'il falloit, pour ajusters les règles, qui nous devoient servir lors de la mesure de la base. Cette opération étoit la première qu'il falloit entreprendre au plutot, et nous la commencâmes effectivement le 22 Février, en partant de *Niemis by* pour avancer à *Poiki Torneå*, où nous n'arrivames que le 11 Avril, ensorte que ce travail continua pendant deux mois entiers; et après l'avoir achevés, nous retournames à la ville de Torneå, pour y attendre l'arrivée du beau temps de l'été, où il falloit observer les angles horizontaux des triangles par les quels nous avions joint *Mallórn* (le point le plus méridional) à *Pahtavara* (le point le plus septentrional). Or ces observations se faisoient pendant les mois de Juin, de Juillet et d'Aout, de sorte qu' au commencement de Septembre nous fûmes tout prèts à commencer avec les observations Astronomiques. En effet nous arrivâmes à *Mallórn* le 7 de ce mois, et nous y fimes déja le 9 nos premiers observations des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur par le méridien, en continuant avec ça tous les jours que nous le permettoit l'état du ciel; de sorte que dans le cours du mois de Septembre nous avions déja fait 260 répétitions de cette distance. Or la raison pour la quelle nous n'en avons fait aucun usage dans la suite, c'est, qu'en partant de Torneå nous avions laissé là par

oubli la pendule B; cependant nous espérames d'abord, que nous pourrions bien nous en passer, et nous commençâmes effectivement par mettre la main à l'oeuvre. Mais le premier examen des observations faites pour avoir le temps de la pendule A, nous fit bientot voir l'extrème irrégularité de sa marche (comme on le peut voir encore par le tableau des comparaisons, que nous avons mis à la tète des observations Astronomiques à *Mallórn);* Cela nout apprit de plus qu' il ne valoit point du tout la peine, de faire le calcul des observations faites pendant tout ce temps là. Il falloit donc, qu' un de nous se détacha, pour aller apporter de Torneå la pendule B, ce que fit Mr PALANDER, de sorte que du 5 Octobre on pouvoit rapporter toutes les observations à cette pendule; et ce n'est que dés lors, que je crois qu'ils méritent de confiance, ensorte que je n'ai pas même fait aucun calcul de toutes celles qui avoient été faites auparavant. Quant à l'azimuth, outre l'observation que nous en avons rapporté du 24 Octobre à *Mallórn*, il-y-en-avoit encore une autre du 14; mais celle du 24 étant plus que suffisante pour la détermination de cet élément, et d'ailleurs mieux détaillée sous ses différents rapports, j'ai espéré qu'on me pardonneroit bien, de n'avoir pas même fait le calcul de la précédente. En effet ces sortes de calculs lors qu'on les veut pousser jusqu' à la derniere exactitude sont extrêmement longs et ennuyeux, (comme on s'en convaincra aisement d'après ce qui a été dit dans l'article 38 du traité

suivant), et tous ceux, qui savent ce que sont de semblables opérations numériques, m'avoueront qu'elles sont capables d'effrayer même les calculateurs les plus indéfatigables, lorsqu'ils n'y sont encouragés par des motifs de l'importance d'un tel travail, ce qui certainement ne pourroit avoir lieu à cette occation. Enfin, lorsque nous étions à *Pahtavara*, il n'y-avoit aucun moyen d'avoir quelque mire placée dans les environs du méridien, d'où ils s'ensuivoit, que les observations du temps pour règler la pendule, ne pouvoient se faire autrement que par les hauteurs correspondantes, qui faute de mire, ne pouvoient pas même se lier celles d'un jour à celles d'un autre pour se vérifier mutuellement. Or les Astronomes observateurs savent, qu' à des hauteurs du pôle, qui sont au-delà de 74 dégrés, telles que celle de Pahtavara, et où par conséquent les étoiles ne montent pas assez rapidement, le moment du passage par le méridien, qu'on a obtenu de cette manière, est souvent exposé à 3 ou même 4 sécondes d'erreur, ce qui en produiroit autant dans la valeur de l'azimuth qu'on auroit conclû des observations faites par rapport à ce passage. Cela m'a donc induit à n'en faire aucun usage; toute fois je les ai rapporté dans l'appendice qui vient à la suite de la quatrième section, de même que celles du 14 Octobre faites à *Mallórn*, afin que, s'il-y-avoit quelqu' un qui en voulusse faire le calcul par lui même, il ne lui manqueroit les donnés indispensables pour un tel travail. Quant à moi, je

ne balancerois aucunement à me prononcer tout entier en faveur de l'observation du 24 Octobre, de manière à ne lui soupçonner pas même l'erreur d'une démi-seconde, comme j'espère qu'on me l'accordera aisement en parcourant les détails, que j'en ai donné à la fin de la troisième section; et l'usage qu'on en voudroit faire pour la Théorie du Sphéroide, en la comparant avec celle d'à *Pahtavara*, ne sauroit certainement avoir lieu par les raisons, que je viens de rapporter.

Or ces raisons suffisent encore pour faire présumer le peu d'importance des résultats tirés de la mesure d'un dégré de longitude qu'on auroit exécuté à cette élévation du pôle; à quoi ajoutant la difficulté, et j'ose même dire l'impossibilité, où l'on seroit dans un pays aussi désert et abandonné que celuici, d'avoir la différence des méridiens déterminée uniquement par le moyen des signaux de feu, il s'ensuit, qu' une telle opération doit infalliblement manquer son but, en conduisant à des résultats, qui par l'effet du hazard peuvent bien s'accorder avec ceux qu'on à déduit d'autre part, ou même s'en écarter considéblement; mais qui non obstant cela ne sauroient être utils ni pour les appuyer par de nouvelles autorités, ni même pour les affoiblir. En effet, si l'on considère combien il faut de circonspection, même dans un observatoire parfaitement établi, et fourni d'instruments les mieux choisis, pour y établir la position

de la méridienne à un cinquième de seconde du temps près (ce qui équivaut à 9″259 d'un arc du grand cercle), j'espère, qu'on ne fera pas de difficulté, à m'en accorder autant d'erreur inévitable dans les observatoires, qu'il faudroit avoir à chaque station, pour se trainer ainsi de pas en pas depuis un des points extrêmes jusqu' à l'autre; et si l'on y ajoute de plus les erreurs de l'éstimation du tems, qu'on est sujet à commettre, tant en prenant les passages des étoiles par le méridien (pour régler la pendule), qu'en observant les phénomènes, qui doivent déterminer la différence en longitude, enfin les erreurs qui dépendent de la marche plus ou moins régulière de la pendule, il résultera de toutes ces circonstances réunies, qu'il faudroit une adresse idéale, ou peu s'enfaut, pour s'assurer de la différence des méridiens des points extrêmes à une seconde de tems près; encore suis je convaincû, que les Astronomes observateurs ne l'admettroient jamais comme étant parfaitement déterminée, qu'au dédans des limites de deux secondes au moins; ce qui feroit une incertitude de 92″593 de l'arc d'un grand cercle, de sorte, qu'en le repartissant même sur une amplitude de trois dégrés de différence en longitude, ce n'en seroit pas moins une incertitude d'un sur 324, c'est à dire qu'on seroit exposé à une erreur de 308.6 Mètres sur une distance de 100000. Or cette erreur, sans sortir des limites de la vraisemblance, ne laisseroit pas d'influer sensiblement sur la figure qui en résulteroit pour la

terre, et c'est par ces raisons jointes à des difficultés tirées de la nature du pays même, que nous avons tout à fait rejeté l'idée de la mesure d'un arc en longitude. Je n'ai fait aucune mention de la méthode des longitudes au moyen des observations Astronomiques, parceque çelleci ne sauroit être employée que lorsqu'il s'agit des observatoires fixes, où il se fasse continuellement de semblables observations; encore y-a-t-il plusieurs secondes d'incertitude dans la différence des méridiens qu'on en déduit, si cette différence n'est le résultat d'un grand nombre d'occultations d'étoiles fixes par la lune; temoin celle des observatoires Royales de *Paris* et de *Greenwich*, dont on peut voir une discussion plus détaillée dans les Transactions Philosophiques pour l'an 1787 par MASKELYNE. Toutefois, je suis loin de désapprouver tout à fait ces sortes d'opérations; au contraire je compte beaucoup sur celle, qui vient d'être exécutée en Allemagne, par le Baron de ZACH; et une opération, qui s'étendroit de *Stockholm* jusqu' à *Petersbourg*, seroit à mon avis du plus grand intéret, tant pour l'Astronomie en général, que pour la Théorie de la terre en particulier; Enfin je n'ai eù en vûe dans tout ce que je viens de dire, que les difficultés qui nous auroient rencontré à *Torneå;* et je crois même que pour en tirer des résultats qui soient utils pour la détermination de la Figure de la terre, il faudroit encore mesurer des arcs d'une longueur considérable.

Les résultats de notre opération étant fort différents de ceux de l'ancienne, il faut encore que j'avoue l'étonnement dont j'ai été épris en l'appercevant d' abord. Or j'ai prévû même force de difficultés, que les Astronomes observateurs pourroient faire, à l'attribuer toute entière à des erreurs d'observations commises par les Académiciens de France. En effet j'ai été en suspens moi même, et je le suis demeuré encore, jusqu' à ce qu'ayant parcouru plus attentivement le détail des observations de BOUGUER et CONDAMINE (rapportées par CONDAMINE dans son ourage *de la Mesure des trois premiers dégrés du méridien dans l'hémisphere Austral)* j'y ai trouvé des discrépances qui ne rendent que fort vraisemblables des erreurs de 30 ou 40 secondes. En effet la distance de ε d'Orion au zénith de *Mama Tarqui*, et réduite à l'époque du 1:er Janvier 1743, est

1:o d'aprés la première suite d'observations faites *en commun* en 1739	$= 1^\circ 86' 52'' 2$
2:o d'après la seconde - - -	$= 1^\circ 86' 79'' 6$
3:o d'après la troisième - -	$= 1^\circ 86' 79'' 3$
4:o d'après la première suite d'observations faites par BOUGUER en 1741	$= 1^\circ 87' 85'' 8$
5:o d'après la seconde - -	$= 1^\circ 87' 50'' 0$
6:o d'après la troisième - -	$= 1^\circ 87' 34'' 6$
7:o d'après la quatrième - -	$= 1^\circ 87' 39'' 5$
8:o d'après la cinquième -	$= 1^\circ 87' 32'' 1$
9:o d'après la sixième - -	$= 1^\circ 87' 43'' 8$

10:0 d'aprés la première suite d'observations faites par CONDAMINE en 1742 et 1743 - - - = 1°87′34″6
11:0 d'aprés la seconde - - = 1°87′35″3
12:0 d'aprés le résultat adopté dèfinitivement - - - - = 1°87′36″7

Si nous supposons donc, qu'on n'eusse fait d' autres observations que celles du numero 2 et 3, la distance de l'étoile au zénith qui en auroit résulté, n'en seroit pas moins fautive de 57″25, malgré tout l'accord des observations particuliéres d'où on l'a déduit; et si on s'étoit arrêté au milieu des résultats des observations de 1739, on s'y seroit trompé de 66″3. Enfin il-y-a encore lieu de croire, que si l'on n'avoit point fait de changement au secteur tel qu'on l'employa d'abord, la valeur observée de cette distance seroit toujours devenue trop petite de 50 à 60 secondes; ce que j'ai voulu remarquer, afin d'indiquer, que l'accord d'un grand nombre d' observations ne suffit pas toujours pour en prouver la bonté, à moins qu'on ne se soit assuré auparavant, par l'examen le plus scrupuleux de l'instrument dont on s'est servi, qu'il n'y-ait eû dans celuici aucune cause, qui ait agi constamment dans le même sens pour en altérer tous les résultats. Ces considérations jointes à une quantité d'autres me font encore soupçonner que les grands secteurs ne sont point du tout les instruments qu'il faut employer de nos jours pour ces sortes d'opérations; et ce qui surtout doit inspi-

rer de défiance, c'est que dans la dernière suite d' observations faites par BOUGUER à *Cotchesqui* (et d'où l'on a déterminé définitivement la valeur de l'arc du méridien) il se trouve des différences de 29″6, quand même le secteur n'avoit pas été retourné. Toutefois qu'on n'infère de ces remarques, que se soit mon intention de diminuer par là le mérite de l'opération du Perou; en effet personne ne sauroit méconnoitre les soins et l'assiduité des illustres observateurs qui l'ont exécuté, et par lesquels ils n'ont rien négligé de ce qui ait pu contribuer à assurer l'exactitude de leur opération, en ayant effectivement mis à profit toutes les ressources de l'art des expériences, de la fabrique des instruments et de leur manoeuvre, pour s'approcher au possible de l'idéal du Géomètre; enfin je suis persuadé, que, si personne de leur tems étoit capable de faire une pareille mesure sans défaut, c'étoit eux, néanmoins je ne saurois attribuer à leur détermination du dégré du méridien plus de poids qu'ils ne l'ont fait eux mêmes, en la donnant pour exacte au-dedans des limites de 30 ou 40 toises pour le dégré sexagésimal. *).

---

*) Lors des comparaisons que j'ai fait dans la section quatrième du traité suivant, je suis parti de la valeur du dégré sexagésimal déterminée par BOUGUER à être = 56753 toises, comme l'ont fait aussi LA PLACE et les autres Géomètres de Paris, en faisant les calculs qui devoient faire connoitre definitivement la valeur du Mètre. Or CONDAMINE, en partant des mêmes observations simultanées faites par lui même à *Mama Tarqui* et par BOUGUER à *Cotchesqui*, a préféré de s'en tenir à la valeur de 56749 toises; et en partant des observations correspondantes, qu'il avoit fait lui seul à *Mama-Tarqui*

Mais, quant au Lecteur qui s'en voudroit instruire davantage, je ne saurois faire de mieux que de le

---

et à *Quito*, il l'a trouvé = 56717 toises, de sorte qu'en prenant le milieu de ces deux derniers résultats, on n'auroit que 56733 toises pour cette valeur, ce qui étant comparé à notre mesure feroit l'applatissement de la terre $= \frac{1}{309.4}$. Ce résultat mérite surtout d'être remarqué, à cause de l'accord si surprenant, qu'il fait avoir lieu entre les résultats de la pesanteur universelle, et ceux d'autres opérations les plus récentes exécutées en *France* et aux *Indes Orientales*; de sorte que, quant à moi, j'inclinerois encore de ce coté, d'autant plus que j'y ai été conduit par les observations elles mèmes, et sans y faire aucune altération, si ce n'est qu'au lieu de me déterminer uniquement en faveur des 56753 toises de BOUGUER, j'ai préféré le milieu des deux resultats que je viens de rapporter d'après CONDAMINE. Or pour que le Lecteur en puisse juger par soi mème; je vais rapprocher ici une quantité de résultats independants, qui y conduisent de mème: savoir 1:o Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre, comme nous venons de le voir, nous ont donné $\frac{1}{304}$ pour limite du maximum de l'applatissement. 2:o L'inégalité — 20″.987 Sin. ☊ de la lune en longitude, dont le maximum a été déterminé avec la derniere exactitude par M:r BÜRG, et d'après un grand nombre d'observations de MASKELYNE, cette inégalité, dis je, est due à la non-sphericité de la Terre; son maximum seroit 35″49 dans le cas de l'homogénéité de la Terre, tandisqu'en supposant l'applatissement $= \frac{1}{334}$ il ne seroit que 17″135; d'où l'on voit que la valeut effective de l'Ellipticité qui y répond est $= \frac{1}{305.05}$ 3:o Une semblable inégalité de ce satellite en latitude qui est = — 24″,6914 Sin. ☾, et dont le maximum a été déterminé par le mème Astronome, dépend encore de cet applatissement, de sorte qu'en le supposant $= \frac{1}{334}$ ce coëfficient seroit 20″023, tandisque dans le cas de l'homogéneité de la Terre il s'élèveroit à 41″70; d'où il s'ensuit que sa valeur actuelle répond à $\frac{1}{304.6}$ d'applatissement. 4:o La comparaison, que nous avons fait dans la section quatrième de notre mesure avec celle de MECHAIN et DELAMBRE, nous a donné $\frac{1}{307.4}$ Pour la valeur de l'applatissement. 5:o Dans le journal publié à

renvoyer aux deux excellents ouvrages, *De la Figure de la Terre par* BOUGUER, et surtout à celui *De la mesure des trois premiers dégrés du méridien dans l'hémisphère Austral* par CONDAMINE; les quels, comme je l'espère, mettront encore en évidence la possibilité de bien plus grandes erreurs, que ne l'est la différence de l'opération de 1736 d'avec la notre.

Quant à la partie théorique de mon ouvrage, on y trouvera sans doute beaucoup de choses, dont il a été traité amplement par M:r DELAMBRE dans ses *Méthodes Analytiques pour la détermination d'un arc du méridien*, (où il semble en effet que cet illustre Astronome ait épuisé tout ce qu'on pourroit dire relativement à se sujet). Néanmoins j'espère, que le Lecteur instruit y trouvera encore quantité de choses tout à fait nouvelles, et qui n'ont été discutées auparavant par personne; enfin, lors même que je me suis rencontré avec M:r DELAMBRE dans les résultats auxquels je suis parvenu, ce n'est jamais qu'après y être arrivé par des voies tout différentes. Or, parmi le nombre des formules de réductions, que j'ai proposé, il n'y-en-a presqu' aucune, que je n'ai déduit des théorèmes les plus généraux; de sorte, qu'en

---

Londres par TILLOCH sous le nom de *Philosopical Magazine*, et dans le cahier pour le mois de 1804, j'ai vu rapporté qu'on vient d'avoir exécuté une pareille mesure aux Indes Orientales à la latitude de 13°92'59", où l'on a trouvé la longueur de dégré égale à 54444.6 *fathoms* ou 99556.6 Mètres; et en comparant cette valeur avec notre mesure, il résulte pour la valeur de l'applatissement $\frac{1}{307.17}$.

les ayant dérivé des principes les plus fécondes en applications, j'ai toujours été en état de les adapter à différents usages, dont ceux qui se rapportent aux besoins de cette opération ne sont que des cas fort particuliers; telles sont, la formule pour la réduction des angles à l'horizon (voyez l'article 19), et celle pour la correction des hauteurs extra-méridiennes (voyez les articles 36, 37 et 38). Partout j'ai fait usage du fameux théorème de TAYLOR, lorsqu'il a été question de développer les fonctions dans des suites ordonnées par rapport aux puissances d'autres fonctions de quelques unes des variables dont elles sont composées; et, en déterminant la suite, qui sert à calculer la valeur d'un arc Elliptique d'après celle de l'angle intercepté par les perpendiculaires menés des points extrêmes de cet arc (et qui est encore équivalent à la différence de ces points en latitude), je suis parti de l'extension que j'ai donné à ce théorème dans les Mémoires de l'Académie Royale des sciences de Stockholm, où il s'agit du développement des fonctions dans des suites ordonnées par rapport aux puissances de quelques unes et par rapport aux sinus ou aux cosinus des multiples d'autres de ses variables; de sorte que sous ce point de vûe j'ai encore taché de rendre mon ouvrage utile pour ceux même qui voudroient bien le parcourir en Géomètres. Je me suis même appesanti, peut être un peu de trop, sur des détails, qui au premier coup d'oeil ne laisseront pas de paroitre des minuties; mais la raison

en est, que dans une opération de la nature de celleci, on ne sauroit jamais porter trop d'attention aux circonstances les plus légères, qui d'une manière ou d'autre peuvent altérer les observations; cette considération m'a donc induit, à n'en négliger aucune, qu'après en avoir fait l'examen le plus sevère, ce qui m'a mis en état d'en apprécier rigoureusement tout l'effet, de sorte qu'en effet je peux dire, que rien n'a été laissé à l'indéfini. *Denique confisus sum fore, ut defectus aequis judicibus non tam reprehendantur, quam benignis conatibus suppleantur.*

ERRATA.

Disc. prél. VIII. l. 10; d'en *lisez* de n

PAGE 3 ligne 10; $ea\alpha = {}^{2}m$ *lisez* $ea\alpha = 2^{m}$

12	—	16;	celles	—	celle
—	—	21;	au de là	—	au-delà
13	—	7;	AOM	—	OMR
15	—	28;	Figure	—	Figure 14 et 16
16	—	4;	Figure	—	Figure 12
17	—	21;	selles-là	—	celles-là
19	—	9;	Figure	—	Figure 17
19	—	12;	aligements	—	alignements
19	—	19;	Figure	—	Figure 1
23	—	6;	Figure	—	Figure 34
24	—	5;	abondonner	—	abandonner
27	—	28;	jusqu'u à	—	jusqu' à
28	—	11;	que le quitter	—	que de quitter
28	—	28;	qu'on dévant	—	qu'ont dévant
28	—	31;	transversions	—	traversions
31	—	22;	les distances	—	des distances
37	—	27;	pour cas;	—	pour le cas
39	—	1;	ayant été, réduit	—	ayant été réduit
126	—	22;	la passage	—	le passage
133	—	13;	vents cou lis	—	vents coulis.

I:re Section.

De La Mesure de la Base.

§. 1.

Les règles employées pour mesurer la base sont des barres de fer d'un peu plus de six mètres de longueur, telles qu'on les peut voir représentées dans la Figure I, et dont les autres dimensions sont l'une de 24mm3 et l'autre de 31mm1. Pour les rendre plus denses, et pour en diminuer par là les variations en longueur causées par leurs différents degrés de temperature, on les avoit fait écrouir fortement. Vers chacune des deux extrémités on les avoit couvert de deux lames ABCD et EFGH, qui etoient d'argent (au titre de celui qu'on emploit communement dans les ouvrages ordinaires) afin que pendant le cours des operations à venir elles ne seroient point altérées par l'effet de l'humidité de l'atmosphère. Sur ces lames on avoit tracé deux lignes a et e, dont la distance ae devoit etre exactement egale à 6 mêtres; de sorte qu'en les plaçant dans la svite, elles se svivoient tout comme on le voit dans la Figure 2: savoir la ligne désignée par a_{n+1} (appartenante à une barre quelconque de l'ordre $n+1$) etant toujours faite coincider exactement, avec celle désignée par e_n dans la précédente. Or la distance ae etant le module qu'il falloit employer partout dans la svite, voici les principes d'aprés lesquels nous l'avons déterminée. IKLMNOPQ (voyez la Fig. 4, NN. 1, 2 et 3) est un parallèlipipède de fer exécuté à Paris par Lenoir, dont la longueur IN est le double mêtre, la largeur IK = 43.5 milli-

mêtres, et l'épaisseur IL = 9.^{mm} 2. *). ABCDEFGH et RSTUVXYZ sont deux autres parallèlipipèdes que nous avions fait construire a Stockholm, et qui avoient eté rôdés l'un vers l'autre, afin qu'en les serrant contre les parois des deux extrémités de la barre du double Mêtre au moyen de deux vis de pression, il n'en résulteroit qu'un seul parallèlipipède abcdefgh (voyez la Figure 5), dans la surface duquel il-y-auroit des espéces de sillons hi et kl beaucoup moins larges qu'il n'auroit eté possible d'en faire avec les pointes d'un compas à verge. Au moyen de cela on avoit gagné qu'en ajustant le compas à verge sur la distance hk, les pointes en pouvoient reposer dans ces sillons; et qu'en outre l'oeil de l'Observateur avoit un terme de comparaison au delà des extrémités des parois de la barre du double Mêtre; ensorte que par là nous avons espéré pouvoir ajuster la distance des pointes du compas à verge beaucoup plus exactement que cela n'auroit eté possible en pointant sur les parois IKLM et NOPQ. Cela fait, il n-y-avoit qu'à faire les trois pas, savoir ceux de a à α (Figure 1), de α à ε, et de ε à e; et parmi les différentes sources d'erreurs qui pouvoient se glisser en faisant cela, il-y-en avoit une qui pouvoit dériver de la déviation des points intermédiaires α et ε de la droite ae. Or quelque difficile qu'il paroisse d'éviter celle-là absolument, on commençoit par la réduire au moins à ne pas avoir lieu qu'en un sens, de sorte que les points α et ε ne s'écarteroient du plan vertical qui passoit par la droite ae; ce qu'on obte-

---

*) La longueur de celuici a eté vérifiée en derniere rigueur, par les Citoyens MECHAIN et DELAMBRE et sous les auspices de l'Institut National de France, qui en fit présent à l'Academie Royale des sciences de Stockholm aussi bien que d'une Toise du Perou: et DELAMBRE croit pouvoir assurer que l'erreur, s'il y en a, doit en tout etre au dessous d'un millioniéme. De sorte que par là toutes nos mesures itineraires pouvoient etre exprimées immédiatement ou en Mêtres ou en Toises, et que ce n'est que par des raisons d'Arithmetique que nous nous en sommes tenu au Mêtre.

noit en les prenant dans le plan de la ligne d'un fil de soie tendu de a à e; ensvite on détermina en dernier ressort la position de α et ε de la manière svivante: Les points a et e ayant eté réduits à l'horizon l'un de l'autre par le moyen d'un niveau fait exprés pour celà, et qui comprenoit 6 mêtres, on détermina ensvite les angles $ea\alpha$, $e\varphi\varepsilon$ et $\varphi e\varepsilon$ au moyen d'un autre niveau qui n'en comprenoit que 2; abaissant donc de α et ε (voyez la Fig. 3.) sur la droite ae les perpendiculaires $\alpha\alpha_0$ et $\varepsilon\varepsilon_0$ on en déduisit les valeurs de $a\alpha_0 = a\alpha$. Cosin $ea\alpha = 2^m \left(1 - 2\sin\left(\frac{1}{2}ea\alpha\right)^2\right)$, $\alpha_0\varepsilon_0 = \alpha\varepsilon$. Cosin $e\varphi\varepsilon = 2^m \left(1 - 2\sin\left(\frac{1}{2}e\varphi\varepsilon\right)^2\right)$ et $\varepsilon_0 e = \varepsilon e$. Cosin $\varphi e\varepsilon = 2^m \left(1 - 2\sin\left(\frac{1}{2}\varphi e\varepsilon\right)^2\right)$, d'ou la droite ae devenoit $= 6^m - 4^m\left(\text{Sin}\left(\frac{1}{2}ea\alpha\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}e\varphi\varepsilon\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\varphi e\varepsilon\right)^2\right) = 6^m - 1^m\left((ea\alpha)^2 + (e\varphi\varepsilon)^2 + (\varphi e\varepsilon)^2\right)$ à cause de la petitesse des angles $ea\alpha$, $e\varphi\varepsilon$ et $\varphi e\varepsilon$, qu'on peut confondre ici avec leurs Sinus; De sorte qu'en supposant que λ, μ et ν soit le nombre de minutes que contiennent ces angles, la correction soustractive qu'il faut faire à 6 mêtres, pour avoir la vraie valeur de ea, ne sera que $0^{mm}.000024674 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$; c'est à dire que dans le cas actuel, ou λ etoit $= 5.1$, $\mu = 6.0$, et $\nu = 0.9$, la correction à faire ne sera que $0^{mm}00155$; ce qui n'en produit pour toute la base que $3^{mm}.734$, et $46^{mm}.72$ pour l'arc du méridien qui s'étend de Mallörn à Pahtavara.

§. 2.

La barre, dont nous avons déterminè la longueur de cette manière, est celle que nous avons toujours coté par 4 dans nos registres manuscripts. Or celleci ayant eté déterminée de la sorte, nous pensâmes que, quant aux quatre autres modules, il ne falloit point répéter pour ceux-ci les erreurs tant soit peu considérables qu'on ne sauroit éviter en faisant les trois pas dont nous avons fait

mention. A cet effet nous ſimes construire un compas à verge, qui comprenoit à la ſois tous les 6 mêtres et dont on peut voir la carcasse représentée dans la Figure 10; celleci avoit eté liée au moyen d'arc-boutans de maniére à ne se courber pas même de 2 òu 3 millimêtres, quoiqu'elle reposoit sur ses points extrêmes, et qu'un homme fut assis sur son milieu; enfin on la suspendit au moyen de contre-poids, tels qu'on en emploit pour les instrumens de passage, aprés quoi on y mit les curseurs, ou les böetes de laïton qui portoient les pointes, et le module ae appartenant aux quatre autres barres fut déterminé au moyen de la meme ouverture du compas à verge; De sorte que dans la svite nous pouvions au moins etre assurés, que $(ae)_1 = (ae)_2 = (ae)_3 = (ae)_5$, et que la différence qu'on leur pourroit supposer d'avec le $(ae)_4$ ne sauroit qu'etre au dessous de tout ce qu'aperçoit l'oeil armé d'un Microscope: Enfin il faut remarquer que le Thermomêtre centigrade etoit à $+0°.3$ de température lorsqu'on détermina le $(ae)_4$, et qu'en égalant les $(ae)_1$, $(ae)_2$, $(ae)_3$ et $(ae)_5$ à celuici, le tout n'etoit qu'à la température de $-13°$.

§. 3.

Aprés avoir déterminé nos modules d'aprés les principes que nous venons de détailler, il falloit encore prévenir toute autre variation en longueur, que celle qui doit nécessairement avoir lieu en vertu de la dilatation ou la contraction des metaux, qui dépend de leur différents degrés de température. Or voici comment nous nous y primes pour atteindre ce but là: AB (voyez la Figure 6) est une planche de sapin dont on avoit arc-bouté le coté du dessous par l'angle FGH qui devoit l'empecher de se jetter par l'effet de l'humidité de l'atmosphêre; GK une vis, à l'aide de laquelle on pouvoit régler du haut en bas les mouvements les plus insensibles du milieu de la planche; C, D et E trois plans de cuivre jaune, qu'on avoit rendu ſixes perpendiculairement à la planche AB, et dans les

quelles on avoit fait les coussinets qui devoit soutenir la barre modulaire; c. d et e de petits trous qu'on avoit fait forer dans ces plans, enfin c d e un fil de soie tendu de c à e, lequel n'etant point du tout gêné en d faisoit voir qu'alors les trois points etoient dans le meme plan vertical, et de plus qu'ils etoient placé sur la ligne que prend toujours une corde en vertu de sa pesanteur, et qui est si généralement connue sous le nom de la châinette. Or afin de pouvoir toujours les ramener à la position primitive dont nous venons de parler, on avoit laissé au plan D une espêce de mouvement de micromêtre en sens azimuthal, de sorte que par là on pouvoit redresser le point d dans le vertical de *ce;* le reste se faisoit au moyen de la vis GK qui régloit les mouvements du haut en bas; de sorte qu'ayant vérifié cela, on etoit toujours sûr que la barre modulaire avoit conservé sa courbure primitive, et que par conséquent le module luimême n'avoit point changé de valeur.

§. 4.

Les réflexions svivantes concernantes les proprietés de la châinette nous mettront encore en état d'estimer en derniere rigueur les corrections â faire. Soit donc AB (voyez la Figure 7.) la droite horizontalle qui joint les points extrêmes A et B: AXB la châinette; AC et BC des tangentes à celle-là dans les points A et B, qui se coupent réciproquement en C; CXD perpendiculaire à AB; M un point quelconque pris dans la châinette; MP perpendiculaire à AB; MQ la tangente à la châinette en M, coupante AC en Q; QT perpendiculaire à AB; U et E des points quelconques pris à volonté sur QT et CD; enfin completez les parallèlogrammes RUVQ et FEGC, et faites $AB = 2a$, la longueur $AXB = 2e$ et son poids $= 2\pi$, l'angle $DAC = m$, $AP = x$ et $PM = y$. Alors la force avec la quelle le fil est tendu dans le point A sera au poids de ce fil (ou à 2π) $=$ FC: EC $=$ sin. FEC: sin. EFC $=$ sin. ECG: $(200^\circ - ACB)$ $=$ sin ECG: sin. ACB $=$

sin. ACD: sin. 2 ACD = sin. ACD: 2 sin. ACD. Cosin. ACD = 1: 2 Cosin. ACD = 1; 2 sin. DAC = 1: 2 sin. m, d'ou la force de tension en A sera = π. Cosec. m. De plus sin. TQM = $\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, Cosin. TQM = $\frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sin. AQT = Cosin. m, Cosin. AQT = sin. m, sin. AQM = sin. (AQT + TQM) = sin. TQM. Cosin. AQT + Cosin. TQM. sin. AQT = $\frac{dx \text{ Sin. } m - dy \text{ Cosin. } m}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, et le poids de AXM à la force de tension dans le point A = UQ : QR = sin. URQ : sin. RUQ = sin. AQM : sin. TQM = $\frac{dx. \sin. m - dy. \text{Cosin.} m}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$: $\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, c'est à dire $\int\sqrt{dx^2 + dy^2}$: e. Cosec. m = dx sin. m — dy Cosin. m: dx; Donc $\int\sqrt{dx^2 + dy}$ sera $= e - \frac{edy}{dx}$ Cotang. m, et delà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{-e\,d^2y}{dx}$. Cotang. m, $\frac{d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = -\frac{dx}{e}$ Tang. m, et $\frac{dy\,d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ou la différentielle de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = -\frac{dx\,dy}{e}$ Tang. m; par conséquent $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,(\text{Const.} - y \sin. m.)}{e. \text{Cosin. } m.}$.

Pour déterminer la constante arbitraire que l'intégration vient d'introduire, il faut se ressouvenir, que $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ est toujours = dx. Cosec. TQM quelles que soient les valeurs de x et y; or x et y etant supposés = o le point M sera transporté en A, et l'angle TQM se changera en TQC = ATQ + TAQ = 100° + m, de sorte que Cosec. TQM deviendra = sec. m; Donc dx sec. m = $\frac{dx \text{ Const.}}{e. \text{Cosin.} m.}$

et par conséquent la constante elle même $= e$, et $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx(e - y \sin. m)}{e. \text{Cosin.}\, m}$. Prenant le quarré de celleci, $dx^2 + dy^2$ deviendra $= \frac{dx^2 (e - y \sin. m)^2}{e^2. \text{Cosin.}\, m^2.}$, et delà $dx = \frac{\pm dy}{\sqrt{\left(\frac{e - y \sin. m}{e. \text{Cosin.}\, m}\right)^2 - 1}}$, dont l'intégrale sera $x = - e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\left(\frac{e - y \sin. m \pm \sqrt{(e - y \sin. m)^2 - e^2 \text{Cosin.}\, m^2}}{e(1 + \sin. m)}\right)$, l'arbitraire ayant eté déterminée de maniére à faire évanouir la valeur de x correspondante au signe + devant le radical en faisant $y = 0$; ensorte que la valeur correspondante au signe —, ou AB sera $= - e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\frac{1 - \sin. m}{1 + \sin. m} = - e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\left(\frac{1 - \sin. m}{\text{Cosin.}\, m}\right)^2 = 2 e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\frac{\text{Cosin.}\, m}{1 - \sin. m}$ $= 2 e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\frac{1 + \sin. m}{\text{Cosin.}\, m} = 2 e$ Cotang. m. Hyp. Log. Tang. $(50° + \frac{1}{2} m)$. Deplus faisant $DX = ue$, il s'ensvivra que $- e$ Cotang. m. Hyp. Log. $\frac{\text{Cosin.}\, m}{1 + \sin. m}$ deviendra $= - e$ Cotang m. Hyp. Log. $\left(\frac{1 - u \sin. m - \sqrt{(1 - u \sin. m)^2 - \text{Cosin.}\, m^2}}{1 + \sin. m}\right)$; $1 - u \sin. m - \sqrt{(1 - u \sin. m)^2 - \text{Cosin.}\, m^2} = \text{Cosin.}\, m$, $(1 - u \sin. m)^2 - \text{Cosin.}\, m^2 = (1 - u \sin. m)^2 - 2 \text{Cosin.}\, m.$ $(1 - u \sin. m) + \text{Cosin.}\, m^2$, $\text{Cosin.}\, m = 1 - u \sin. m$, $u \sin. m = 1 - \text{Cosin.}\, m$; c'est à dire $2 u \sin. \frac{1}{2} m.\ \text{Cosin.}\, \frac{1}{2} m = 2 \sin. (\frac{1}{2} m)^2$, et par conséquent $u = \text{Tang.}\, \frac{1}{2} m$, $\text{Tang.}\, m = \frac{2u}{1 - u^2}$, $\text{Cotang.}\, m = \frac{1 - u^2}{2u}$, $\sin. m = \frac{2u}{1 + u^2}$, $\text{Cosin.}\, m = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $1 - \sin. m = \frac{(1 - u)^2}{1 + u^2}$, $\frac{\text{Cosin.}\, m}{1 - \sin. m} = \frac{1 - u^2}{(1 - u)^2} = \frac{1 + u}{1 - u}$

et AB ou $2a = e\,\frac{(1-u^2)}{u}$. Hyp. Log. $\frac{1+u}{1-u} = e\,\frac{(1-u^2)}{u}$
$(2u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 + \&c) = 2e(1-u^2)(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 + \&c)$
$= 2e\,(1 - \frac{2}{1.3}u^2 - \frac{2}{3.5}\,u^4 - \&c.$ Enfin l'excés de la courbe AXB sur la droite AB sera $= 4e(\frac{1}{1.3}u^2 + \frac{1}{3.5}u^4 + \frac{1}{5.7}u^6 + \&c)$, et la force de tension dans le point A $= \pi$ Cosec. m $= \frac{\pi(1+u^2)}{2u}$. Or si nous représentons par α le changement qui arrive à u en augmentant cette force dans la raison de r à l'unité, il en résultera l'équation svivante pour déterminer la valeur de u: savoir $\frac{r\pi(1+u^2)}{2u} = \frac{\pi(1+\overline{u-\alpha}|^2)}{2(u-\alpha)}$

et par conséquent $u = \left(\frac{r}{r-1}\right)\alpha - \left(\frac{r.\overline{r+1}}{\overline{r-1}|^3}\right)\alpha^3$ &c.

De sorte que si r etoit $= 2$, et $\alpha = 0.000333$ (c'est à dire dans le cas actuel ou e est $= 3$ mètres, si le mouvement de X en haut auroit eté = un millimètre, en ayant doublé la force de tension dans le point A), u seroit $= 2\alpha - 6\alpha^3$ &c $= 0.000666$; c'est à dire que DX auroit eté = 2 millimètres avant le doublement de la force de tension en A, et qu'aprés ce doublement il ne sera qu'un millimètre; Enfin l'exés de AXB sur la droite AB auroit eté $= 0^{mm}.0018$ avant, et $= 0^{mm}.00045$ aprés le doublement, de sorte que la variation du module apparent causée par ce doublement seroit $= 0^{mm}.00145$. Or l'examen de DX ayant eté répété de cette manière de tems en tems pendant les operations de notre mesure de la base, nous ne trouvâmes jamais qu'elle avoit varié d'un millimètre, et par conséquent la correction qui en résulteroit pour toute la base sera beaucoup au dessous d'un millimètre.

§. 5.

§. 5.

En se proposant de mesurer une distance quelconque il est de la dernière importance de prendre des mesures convénables, pour s'assurer qu'en la parcourant on ne décrive une courbe au lieu de la droite qu'il falloit; or voici les principes qui nous ont dirigé, et les moyens mis en oeuvre dans la svite (voyez les Figures 8 et 1.). IK est une règle de cuivre jaune, à la quelle on avoit vissé les deux plans L et M, qui lui étoient perpendiculaires; NO l'axe de vision d'une lunette, qui repose sur les coussinets qu'on avoit fait pour cet effet dans les plans de L et M; PQ et RS deux supports qu'on avoit attaché à la barre modulaire (savoir un près de chacun de ses bouts) et dont on avoit vérifié la position de sorte, qu'ayant posé la règle IK devant ceuxci, l'axe de vision NO devenoit parallèle à ae. Cette vérification fut faite avec tout le soin imaginable; Néanmoins j'espère que tous ceux qui se seront mêlé de la pratique avoueront la difficulté, qui ne peut manquer d'avoir lieu quand on veut s'en assurer de 2 ou 3 minutes. Or quelques petit que soit l'angle azimuthal intercepté par les verticaux de ae et NO, il en arrivera toujours, que la base mesurée actuellement ne sera point une droite; mais qu'elle en deviendra le poligone inscrit dans une spirale logarithmique, qui dans le cas dont il s'agit pour le présent peut être confondu avec la courbe elle même. Ainsi supposant que A soit le point du départ, et O celui du mire au quel on pointe toujours en avançant dans la courbe AQ m M (voyez la Figure 9.), qu'on décrit actuellement, tandisque la droite AO est celle qu'il faudroit décrire; De plus supposant que AO soit $= a$, $OQ = x$, l'angle $AOQ = v$, l'arc $AQ = z$, l'angle intercepté par le vertical de l'axe de vision et celui de la droite modulaire $ae = \alpha$, enfin $e = 2.7182818$ (ce qui est le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité),

alors les équations svivantes auront lieu *); savoir $v = \text{Tang.}\ \alpha.\text{Hyp.Log.}\left(\frac{a}{x}\right) = \text{Tang.}\ \alpha.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{a - z\ \text{Cosin.}\ \alpha}\right)$, $x = a - z\ \text{Cosin.}\ \alpha = a.\ e^{-v\ \text{Cotang.}\ \alpha}$, $z = (a - x)$. $\text{Sec.}\ \alpha = a\ \text{Sec.}\ \alpha\,(1 - e^{-v\ \text{Cotang.}\ \alpha})$. Par conséquent si on développe ces équations dans des svites ordonnées par rapport aux puissances de α, il en résultera que $v = \alpha.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{1}{3}\alpha^3.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{x}\right) = \alpha.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{a-z}\right) + \alpha^3\left(\frac{1}{3}\text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{a-z}\right) - \frac{\frac{1}{2}z}{a-z}\right)$, $x = a - z + \frac{1}{2} z\alpha^2 = a.e^{\frac{-v}{\alpha}}(1 + \frac{1}{3}v\alpha)$, et $z = a - x + \frac{1}{2}\alpha^2(a - x) = a\left(1 - e^{\frac{-v}{\alpha}} + \frac{1}{2}\alpha^2(1 - e^{\frac{-v}{\alpha}}) - \frac{1}{3}v\alpha.e^{\frac{-v}{\alpha}}\right)$. Par conséquent si m est le point de la courbe AQmM qui est le plus éloigné de la droite AO, et qu'on abaisse de celuici la droite mn perpendiculaire à AO, il s'ensvivra que mn sera à son maximum; Donc la tangente en M sera parallèle à AO, et l'angle AOM ou $v = \alpha$. Substituant cette valeur dans les éqvations précédentes on en obtiendra $Om = \frac{a}{e} + \frac{a}{3e}\alpha^2 = a(0.3678794 + 0.1226265\alpha^2)$,

*) L'analogie fondamentale d'où l'on peut ensvite déduire toutes les affections de la courbe AQmM, est (en vertû de la constance de l'angle α) celleci : $xdv : -dx :: \text{Sin.}\ \alpha : \text{Cosin.}\ \alpha$, c'eſt à dire $dv : -\frac{dx}{x} :: \text{Tang.}\ \alpha : 1$, et delà $dv = -\frac{dx}{x}\ \text{Tang.}\ \alpha$, et $v = -\text{Tang.}\ \alpha.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{x}{\text{Conſt.}}\right)$. Or la constante que l'intégration vient d'introduire est déterminée par la considération que v eſt $= 0$ orsque $x = a$; donc $-\text{Tang.}\ \alpha.\ \text{Hyp. Log.}\left(\frac{a}{\text{Conſt.}}\right) = 0$, et par conséquent $\frac{a}{\text{Const.}} = 1$, et $\text{Const} = a$.

$AQm = a \left(1 - \frac{1}{e} + (0.5 - \frac{5}{6e})\alpha^2\right) = a\,(0.6321206 + 0.1934338\,\alpha^2)$, $mn = \frac{a}{e}\,\alpha + \frac{a}{6e}\,\alpha^3 = a(0.3678794\,\alpha + 0.0613132\,\alpha^3)$, $On = \frac{a}{e} - \frac{a}{6e}\,\alpha^2 = a\,(0.3678794 - 0.0613132\,\alpha^2)$, $An = (1 - \frac{1}{e}) + \frac{a}{6e}\,\alpha^2 = a(0.6321206 + 0.0613132\,\alpha^2)$, et $Am - An = a\,(0.5 - \frac{1}{e})\,\alpha^2 = 0.1321206\,\alpha^2 . a$; c'est à dire, que si μ est le nombre de minutes que contient α, mn sera $= 0.000057786\,\mu a$, et $Am - An = 0.0000000326\,\mu^2 a$. Par exemple si μ étoit $= 10$, et $a = 1000$ mêtres, mn seroit $= 577.86$ millimètres, et $Am - An = 0.326$ millimètres.

§. 6.

En général Qq sera $= \alpha\,(a - z)$. Hyp. Log. $\left(\frac{a}{a-z}\right) + \alpha^3 \left(\frac{2a+z}{6}\right.$ Hyp. Log. $\left(\frac{a}{a-z}\right) - \frac{1}{6}\,(a - z)$. $\Big($Hyp. Log. $\left.\left(\frac{a}{a-z}\right)\right)^3 - \frac{1}{2}\,z\Big) = a.\,e^{\frac{-v}{\alpha}}\,(v + \frac{1}{3}\,v^2\,\alpha - \frac{1}{6}\,v^3)$,
$Oq = a - z + \frac{1}{2}\,z\,\alpha^2 - \frac{1}{2}(a - z)\,v^2 = a - z + \frac{1}{2}\,z\,\alpha^2 - \frac{1}{2}\,\alpha^2$.
$(a - z)\Big($Hyp. Log. $\left(\frac{a}{a-z}\right)\Big)^2 = a.\,e^{\frac{-v}{\alpha}}\,(1 + \frac{1}{3}\,v\alpha - \frac{1}{2}\,v^2)$,
$Aq = z - \frac{1}{2}\,z\,\alpha^2 + \frac{1}{2}\,(a - z)\,v^2 = z - \frac{1}{2}\,z\,\alpha^2 + \frac{1}{2}\,\alpha^2\,(a - z)$ $\Big($Hyp. Log. $\left(\frac{a}{a-z}\right)\Big)^2 = a\,\left(1 - e^{\frac{-v}{\alpha}}\,(1 + \frac{1}{3}\,v\alpha - \frac{1}{2}\,v^2)\right)$, et $AQ - Aq = \frac{1}{2}\,z\,\alpha^2 - \frac{1}{2}\,\alpha^2\,(a - z)$ $\Big($Hyp. Log. $\left(\frac{a}{a-z}\right)\Big)^2 = a$ $\left(\frac{1}{2}\,\alpha^2 - \frac{1}{2}\,e^{\frac{-v}{\alpha}}\,(v^2 + \alpha^2)\right)$. Enfin la relation mutuelle des AO, AQ et Qq peut servir à la détermination de

α, de sorte qu'ayant trouvé par l'observation la valeur de Qq=h, celle de α sera $= \frac{h}{(a-z). \text{Hyp.Log.} \left(\frac{a}{a-z}\right)}$; c'est à dire que, si $h^{(o)}$ étoit la valeur du maximum de Qq, α en deviendroit $= \frac{h^{(o)}.e}{a} - \frac{1}{6}\left(\frac{h^{(o)}.e}{a}\right)^3$.

§. 7.

Or ces opérations se faisants au coeur même de l'hiver, il s'ensvivit que la transparence de l'atmosphére étoit diminuée de beaucoup par les brouillards continuels, qui dérivoient des vapeurs christallisées qu'elle contenoit, de-sorte qu'on n'en pouvoit pas commencer par viser au signal placé à l'autre extrémité de la base; cela auroit été d'autant moins faisable dans cette saison, que nous y trouvâmes de très grandes difficultés même, lorsqu'il falloit observer les angles qui appartiennent au prémier triangle. Cependant les lunettes, qui appartiennent au cercle répétiteur, sont infiniment au dessus de celles que nous avons employé pour ces alignements, de même que l'air étoit alors incomparablement plus diaphane; mais la vraie cause de la difficulté dont il s'agit, c'étoit, que les signaux se projettoient vers la terre, et que le bois qui étoit immédiatement au de là ne leur laissa venir assez de lumière. Donc nous étions forcés de pointer la base au moyen de piquets, que nous faisions planter tout comme dans l'arpentage ordinaire; de sorte qu'en désignant par A (voyez la Figure 11.) le point du départ, et le final par S, O sera le prémier point d'alignement, O_1 le sécond, O_2 le troisième, et ainsi de svite. En général on fit toujours l'intervalle de deux piquets quelconques O_m et O_{m+1} (qui se svivoient) aussi grand qu'on le pouvoit, vû le pouvoir de la lunette et les autres circonstances extérieures; enfin pour ne pas augmenter la correction à faire au delà de ce que la valeur de α rendoit absolument inévitable, nous commen-

çâmes toujours à mirer au piquet svivant O_{m+1} avant que d'être arrivé au précédent O_m. Le point M, où il falloit changer de mire, peut être déterminé par la considération que la Tangente à la courbe dans ce point étant prolongée jusqu'à son rencontre avec la droite AS en R, il en résultera l'angle $ORM = \alpha$; mais l'angle AOM est de même $= \alpha$; donc $OMR + ORM$ ou AOM sera $= 2\,\alpha$. Par conséquent si nous substituons cette valeur au lieu de v, il en résultera que MN est $= \frac{2a}{e^2}\alpha = 0.2706706\,a\,\alpha = 0.00004251683\,\mu a$, et $AM - AN = \left(0.5 - \frac{2.5}{e^2}\right) a\,\alpha^2 = 0.1616618\,a\,\alpha^2 = 0.0000000000399\,\mu^2 a$; c'est à dire, qu'en supposant $a = 1000$ mêtres, et $\mu = 10$, MN seroit $= 425.168$ millimétres, et $AM - AN = 0.399$ millimêtres.

§. 8.

Continuant ensvite de mirer au piquet placé en O_1, dont la distance à O soit $= u\,a$, il s'ensvivra qu'on changera de courbe, et qu'on commencera à décrire une autre de même espéce que la précédente dont le pole sera en O_1. De plus NO_1 sera $= a\left(u + \frac{1}{e^2}\right) - \frac{4a}{3e^2}\alpha^2$, $MO_1 = a\left(u + \frac{1}{e^2}\right) - \frac{2a\,(2e^2u - 1)}{3e\,(e^2u + 1)}\alpha^2$, Tang. $MO_1N = \frac{2}{e^2u + 1}\alpha + \frac{8}{3(e^2u + 1)^2}\alpha^3$, $MO_1N = \frac{2\alpha}{e^2u + 1} + \frac{8e^2u}{3(e^2u + 1)^3}\alpha^3$ et MO_1N Cotang. $\alpha = \frac{2}{e^2u + 1} - \frac{2(e^2u - 1)^2}{3(e^2u + 1)^3}\alpha^2$.

Par conséquent, si A_1 est le point ou l'on suppose que la nouvelle spirale et la droite AS se coupent, et qu'il s'agit d'avoir la distance de O_1 à O pour que A_1O_1 devienne $= AO$, il en résultera l'équation svivante pour déterminer la valeur de u: savoir Hyp. Log. $\left(u + \frac{1}{e^2} -\right.$

$\frac{2(2e^2u-1)}{3e^2(e^2u+1)}\alpha^2\Big) = \frac{-2}{e^2u+1} + \frac{2(e^2u-1)^2}{3(e^2u+1)^3}\alpha^2$; de sorte qu'en supposant que U soit la valeur de u correspondante à celle de $\alpha = 0$, on aura $\frac{-2}{e^2U+1}$ ou $\frac{-2}{e^2(U+\frac{1}{e^2})}$ = Hyp.Log. $(U+\frac{1}{e^2})$, et delà U = 0.5307246, enfin $u = U + \frac{2U(3e^2U-1)}{3(e^4U^2-1)}\alpha^2 = 0.5307246 + 0.2648879\alpha^2$. De plus, si OB est perpendiculaire à AO, l'angle AO_1B sera $= -\alpha$. Hyp. Log. U $- \alpha^3\Big(\frac{2(3e^2U-1)}{3(e^4U^2-1)} + \frac{1}{3}$ Hyp. Log. U $+ \frac{1}{2}$ (Hyp. Log. U$)^2\Big) = 0.6335121\alpha - 0.4886046\alpha^3$, et OB $= -a\alpha$ U. Hyp. Log. U $- a\alpha^3$ $\Big(\frac{2U(3e^2U-1)}{3(e^4U^2--1)} + \frac{1}{3}$ Hyp. Log. U $+ \frac{1}{2}$ U (Hyp. Log. U$)^2 +$ $\frac{2U(3e^2U-1)}{3(e^4U^2-1)}$. Hyp. Log. U $- \frac{1}{6}$ U (Hyp. Log. U$)^3\Big) =$ $0.3362204a\alpha - 0.1139938a\alpha^3$; c'est à dire, qu'en continuant toujours de faire la distance $O_m O_{m+1} = AO$ $(0.5307246 + 0.000000006536\mu^2)$, la base qu'on décrit actuellement ne sera point une droite, mais un systéme composé des parties d'une spirale logarithmique tel qu'il est representé dans la Figure 11, et dans le quel les quantitées svivantes conserveront toujours invariablement la même valeur, savoir l'angle $AO_{m+1}B_m = 63''35121\mu$, l'angle $O_mM_mO_{m+1} = 159''36243\mu$, $O_mB_m = 0.00005281338\mu a$, et la correction qu'il faut faire à la distance qu'on vient de mesurer (lorsqu'on est en M_m) = $(0.0000000399 + 0.000000000123m)\mu^2 a$; de sorte qu'en faisant a = 1000 Mètres, $\mu = 10$ et m = 25, AM_{25} (ou la distance parcourue)

seroit $= 1413o$ mêtres et la correction à faire$=3.464$ millimêtres.

Ce que nous venons de dire suffit pour indiquer les circonstances aux quelles il faut faire attention dans ces sortes de mesure; en effet aucun de nous n'y avoit songé avant que de commencer les opérations mêmes, mais en ayant continué quelques jours nous ne tardâmes pas à remarquer, qu'en passant par delà les premiers piquets plantés en O et O_1 &c, ceuxci étoient toujours un peu du coté de l'ouest, de sorte qu'il en falloit trouver la raison dans le principe même des alignements; or les discussions précédentes nous l'ont fait voir, et nous en avons de plus tiré des formules pour évaleur en dernière rigueur les corrections qui en doivent résulter. Enfin, quant à l'historique, il faut avouer qu'en effet la distance $O_m\,O_{m+1}$ fut prise au hazard, de même que le point M_m; mais pour toutes les valeurs de a nous avons déterminé des valeurs correspondantes de Qq, et nous avons trouvé que, celle de a étant au dessus de 3000 mêtres, $O_m\ B_m$ etoit au dessous d'un mêtre, desorte qu'en conséquence de celà α deviendroit $< 6'.3$; toutefois nous pouvons assurer qu'au moins α étoit au dessous de 10 minutes, et que par conséquent la correction qui en résultera pour toute la base sera au dessous de 17.8 millimêtres.

§. 9.

Les planches, dont nous avons parlé dans l'article 3, ayant été supportées pendant tout le cours des opérations, par des chevalets tels qu'on les voit représentés dans la Figure , il en est arrivé que la base mesurée actuellement s'est trouvé partout élèvée audessus du sol de la moitié d'un Mêtre environ; de sorte qu'en interrompant le travail vers les soirs, il falloit toujours déterminer au moyen d'une espêce de fil à plomb, quel étoit le point même du sol au quel on s'arrêtoit; afin qu'en le reprenant l'autre jour, on pourroit commencer au meme point ou l'on venoit de finir. Mais au lieu d'employer pour cela le fil à plomb lui même, (dont

on n'auroit jamais pu faire cesser les oscillations causées par les vents qui souffloient continuellement) nous nous sommes servi d'une règle de cuivre jaune d'environ 92 centimêtres de longueur (voyez la Figure) sur la quelle on avoit tiré une ligne ab, dont on vérifia ensvite la perpendicularité au niveau mn vissé à un plan perpendiculaire à celui de la règle; de sorte qu'en quitant le travail, pour nous mettre en chemin de nos logies, nous commençames toujours par faire un monceau de neige, qui fut fortement battû afin d'en devenir plus compacte; aprés quoi nous y fimes mettre une tablette de bois de sapin, à la quelle on avoit attaché avec des clous un morceau de laiton marqué d'un point au milieu; Celleci ayant été entourée de quantité de neige, pour en devenir moins sujette à toute sorte de mouvement, on mit la pointe e dans le point dont nous venons de parler; puis mettant mn en niveau, et appliquant à l'extrémité de la barre modulaire une petite lame de cuivre jaune divisée en millimêtres, on notat le point que couvroit la ligne ab, ce qui se pouvoit faire jusqu'au vingtième d'un millimêtre près; Enfin, pour que rien n'arrivat à la Tablette pendant notre absence, un soldat fut toujours laissé sur le lieu pour faire le guet, de sorte que le Jour svivant on étoit toujours sûr de commencer au même endroit où l'on venoit de finir.

§. 10.

L'idée qui se présenta la premiére à l'esprit, lorsqu'il s'agissoit de faire le nivellement de toute la base à mesurer, c'étoit de donner une situation parfaitement horizontale aux barres modulaires dont nous avons fait mention. Mais en ayant réfléchi plus attentivement aux détails des opérations que celà auroit exigé, nous ne tardâmes pas à apercevoir l'excés de lenteur qui en auroit été la svite inévitable (et qui dans le cas actuel devenoit d'autant plus à craindre, que la partie la plus considérable de cette base étoit sur la glace du fleuve de Torneå, de sorte qu'il en falloit

falloit avoir achevé toute la mesure avant qu'il ne commença a dégeler.) D'un autre coté nous y prevoyâmes des difficultés presque insurmontables, surtout vers le point méridional à Niemisby, où il falloit déscendre d'une petite montagne, et où l'inclinaison de nos modules monta quelquefois même jusqu' à 7 grades; de sorte, qu'en prénant le milieu, il étoit pour les 300 premiers mêtres = 3°1986. Donc nous jugeâmes qu'il vaudroit mieux mesurer l'inclinaison de chaque barre en particulier pour en déduire la correction correspondante, aprés quoi la somme de toutes celles — là donneroit la correction à faire pour la base entiére. Or pour en venir à bout, nous nous sommes servi d'un secteur BDE, tel qu'on le voit représenté dans la Figure 13, où le plan du secteur BDE et celui de la règle AB sont perpendiculaires l'un à l'autre; et où FG est un niveau qu'on avoit vissé à l'Alidade CD qui est mobile autour du centre C. De plus nous avions examiné séparément pour chacune des barres mentionnées, combien les droites RS et PQ (voyez la Figure 1) étoient inclinées, lorsque celles des ae étoient parallèles à l'horizon; de sorte qu'en posant la règle AB du secteur sur selles-là, puis faisant mouvoir l'Alidade CD jusqu' à ce que FG étoit en niveau, ensvite notant le point des divisions du limbe au quel répondoit l'index de celuici, il en résulteroit l'angle δ dont la droite modulaire ae inclinoit à l'horizon; aprés quoi la correction correspondante deviendroit $= - 6^m (1 - \text{Cosin.}\ \delta) = - 6^m.\ 2\ \text{Sin.}\ (\frac{1}{2}\delta)^2$; c'est à dire que pour un grade d'inclinaison cette correction auroit été $= - 0.7399$, et pour 7 grades $= - 36.2343$ millimêtres.

§. 11.

Quant aux moyens de placer nos modules convénablement jusqu' à ne différer de leur situation idéale même des plus petites quantités visibles au microscope, il falloit leur procurer deux espêces de mouvement de micromêtre: savoir tant en sens azimuthal pour les alignements, qu'en-

sens progressif pour faire coincider les lignes a et e des modules qui se suivoient. Or pour diriger le mouvement d'azimuth, nous avions fait dans AB et FE (voyez la Figure 14) des espèces de trainaux qui se mouvoient dans une rainure; ceuxci supportoient immédiatement la planche représentée dans la Figure 6, et on en régloit les plus petits mouvements par le moyen des vis qu'on voit à coté. Pour être de même les maitres du mouvement progressif nous sommes partis du principe du lévier de la maniéro suivante: RST (voyez la Figure 15) est une espèce de cléf en forme d'équerre, dont l'une des branches SR représente une fourchette, tandis que l'autre ST est solide et quelque vingt fois plus prolongée que la précédente. Celleci avoit eté rendue fixe dans un pivot qui appartenoit au piéd du plan vertical E (voyez la Figure 6) de sorte qu'on ne lui avoit laissé d'autre mouvement que celui d'une rotation libre autour de S. De plus il-y-avoit dans la barre une goupille appliquée de par dessous, la quelle se glissoit dans la fourchette R, de sorte qu'en faisant mouvoir le point T par la main, toute la barre en commença à se glisser dans les coussinets de C, D et E. Le maximum du mouvement qu'on pouvoit produire de cette maniére, au moyen de l'équerre TSR, n'étoit que de 5 millimêtres de chaque coté de la situation moyenne de la barre; et de plus il se faisoit toujours assez lentement pour qu'on pouvoit s'assurer en derniére rigueur de la coincidence parfaite des lignes désignées auparavant par a_{n+1} et e_n, sans quoi il auroit fallû avoir recours à une languette pour mesurer cette distance, ce qui aprés tout auroit causé de nouveaux embarras, de même qu'il auroit donné lieu à de nouvelles difficultés dérivant de la nature même des divisions au vernier.

§. 12.

Ces principes que nous venons de détailler nous ont servi de guide dans notre mesure de la base; de sorte que, lors même que les circonstances extérieures nous ont forcé

de nous en écarter; ce n'a eté du moins qu'aprés nous avoir assuré par les discussions les plus rigides, qu'il n'-y-avoit de ce coté là rien à craindre. C'étoit le 22 Février 1802 que nous commençâmes nos opérations, en partant du point méridional qui étoit à Niemisby; celuici fut marqué dans la pierre qui avoit été employée auparavant pour la même chose par les Academiciens de France l'an 1736, et nous y fimes graver une croix ABCD (voyez la Figure) dont le centre E étoit le terme de notre base; Enfin pour faire avancer nos opérations autant que possible, nous nous partageames incontinent en deux bandes, de sorte, qu' Ofverbom et Holmqvist dévançoient, réglant les aligements, et l'emplacement des barres aux quantités microscopiques prés; ensvite venoient Palander et moi pour mesurer leur inclinaisons à l'horizon, et noter la Température, de même que pour déterminer en dernier ressort la coincidence des lignes modulaires a_{n+1} et e_n. Or pour toutes les barres nous avons toujours fait usage des deux supports RS et PQ (voyez la Figure) tant pour les alignements que pour les nivellements, de sorte que par là elles se sont vérifié mutuellement; mais quant au thermomêtre, nous ne l'avons noté qu'une fois pour chaque suite des barres. Enfin pour nous assurer que celuici marquât toujours la température des barres, (qui pourroit bien différer de deux ou trois degrés de celle de l'atmosphêre) on en avoit plongé la boule dans du mercure qui touchoit immédiatement a la barre cotée par le 3, et on l'avoit enfermé dans une boëte mastiquée à celle-ci pour contenir le Mercure, de sorte qu'elle étoit à l'abri des rayons du soleil. Les observations mêmes du thermomêtre se faisoient lors du nivellement de la barre, et nous continuâmes de cette maniére tous les jours que nous n'y fumes pas arrêtés par les ouragans accompagnés de neige qui sont si fréquents dans ces climats et qui ne nous laissoient voir les piquets plantés en devant nous, enfin ce n'étoit pas un phénomêne extraordinaire pour nous, que celui de voir le mercure déscendre jusqu' à 30 degrés au

dessous du point de congélation, et ce n'étoit que le 11 Avril que nous atteignimes à Poiki Torneå, précisement au même lieu ou les Academiciens de France avoient choisi le terme de leur base du coté du nord. Or celui-ci étant un pré partagé entre les païsans des deux villages de Särkivara et Rahtola, ou il n'y-avoit point de roc qui nous pouvoit donner un terme de comparaison capable de résister aux injures du tems, nous nous arrêtâmes à une clôture qui séparoit les possessions de ces villages, dans la supposition que l'interêt individuel ne manqueroit pas de faire reparer ce monument lorsqu'il en auroit besoin, de sorte qu'il en acquèrroit par conséquent cette durée que la nature a d'ailleurs refusé aux troncs d'arbres. De plus, pour conserver le point Mathématique lui même, nous fimes faire immédiatement au dessous de la clôture un creux d'environ un mètre et demi de profondeur; puis nous fimes bruler un gros tronc d'arbre de bois de sapin jusqu' à ce que sa surface se fut carbonifiée légèrement, afin de le rendre par là plus propre à résister à la putréfaction; celui-ci étant mis dans le creux, on l'entoura de quantité de gravier melé avec de la chaux et de cailloux, de sorte qu'il en devenoit parfaitement immobile; dans son milieu on enfonça de par dessus un gros fil de laiton; aprés quoi on y mit une couverture de lames de fer étamées, et dans celle-là on fit marquer une croix dont le centre répondoit à celui du tronc; enfin ayant couvert le tout d'écorce de bouleau, nous le fimes enfouir, de sorte qu'il n'en demeura rien au jour. En effet nous espérâmes qu'en retournant l'été prochain pour observer les angles horizontaux nous pourrions retrouver quelques vestiges des operations de 1736; (ce qui devoit être du plus grand interêt, en nous donnant le moyen de comparer la mesure de notre base avec celle d'alors) mais les recherches que nous fimes ensuite dans ce dessein furent toutes en vain; de sorte que, pour les operations géodésiques, il n'y-a d'autre point de comparaison, que celui de la distance des parallèles de l'eglise de Torneå et du signal à Kittis. La mesure immédiate de notre base a été = 14451.912 mètres, et

la somme des corrections dûes à l'inclinaisons des barres à l'horizon = $1^m.4090648$; de sorte qu'en supposant qu'on eût toujours placé les barres en niveau, on ne l'auroit trouvé que $14450^m.5029352$. La température moyenne pendant toute l'opération étoit = − 4°.313 du thermométre centigrade; donc la longueur moyenne de nos modules avoit été plus petite qu'à la température de zéro, ensorte que la valeur de la base en devoit paroitre trop grande. En effet nous ne saurions déterminer en dernière rigueur la correction qui en résultera pour transporter notre mesure à celle qui auroit eû lieu à la température de zéro, tant que nous n'avons fait des expériences de Pyrométre, pour savoir quelle a été la dilatabilité propre à nos modules en particulier; mais en attendant celà, nous croyons devoir adopter les résultats des expériences faites par le General Roy (dont on peut voir les détails dans les Transactions philosophiques pour l'an 1785), et alors la correction dont nous venons de parler deviendra = $0^m.7131173$ (1); de sorte, qu'en supposant qu'on eut mesurée toute la base à la température de zéro, on l'auroit trouvé = $14449^m7898179$. A cela il faut ajouter (pour la réduction aux centres des signaux) $1^m.4318$ à Niemisby et $0^m.0047$ à Poiki Torneå, de sorte que l'arc du grand cercle qui joint les pieds des signaux d'à Niemisby et d'à Poiki Torneå sera = $14451^m2263179$. Encore le fleuve de

(1) Les expériences, que l'on a fait pour avoir la contraction du fer de par le froid, diffèrent sensiblement entre elles, de sorte que celles de Muschenbroek font cette correction = − $0^m.454894$, celles de Bouguer = − $0^m.342728$, celles d'Ellicot = − $0^m.373885$, celles de Don Juan = − $0^m.573291$, celles de Condamine = − $0^m.660531$, celle de Smeaton = − $0^m.778928$, et celles de Herbert = − $0^m.666762$. Par conséquent, si l'on s'en tiendroit au milieu de toutes celles-ci, la correction à faire deviendroit = − $0^m.5501456$.

Torneå a-t-il des cataractes très considérables entre Niemisby et la ville, d'où il est arrivé que la région de notre base a été élévée de $48^{m}.58$ au dessus du niveau de la mer; par conséquent il en faut diminuer la valeur de $0^{m}1102744$ pour avoir celle qui auroit êu lieu à ce niveau; De sorte que, pour avoir la valeur de l'arc du méridien correspondante à la surface de la mer, il faut faire cette base $= 14451^{m}.116 = 7414.4919$ toises du Perou $= 48673.174$ pieds de Svéde (d'aprés la relation de M:r Ekström).

§. 13.

Nous avons représenté dans la Figure 26 les particularités du roc d'à Niemisby; où N est le centre du signal; B le point du départ de la base mesurée immédiatement; NA Nb et NC les lignes d'alignement à Avansaxa, Poiki Torneå et Huitaperi; F et f les centres des croix qui avoient été gravées dans le roc par les Academiciens de France; $BN = 1^{m}.495$, $FN = 2^{m}.33$, $FB = 2^{m}635$, $Nf = 0^{m}954$, $Bf = 1^{m}.07$, l'angle $BNA = 8°.378$, l'angle $ANb = 10°204$, et l'angle $ANC = 114°.179$. De même nous avons représenté dans la Figure 27 les particularités pour la station à Poiki Torneå, ou S est le centre du signal et P celui du tronc d'arbre que nous avions fait enfouir dans la terre; PA et PN les lignes d'alignemens à Avansaxa et Niemisby; l'angle $APN = 85°.6$, l'angle SPN $103°.3$ et la droite SP $= 97.5$ millimêtres. Enfin la vérité Historique exige, qu'avant de finir cette relation, j'avoue publiquement l'obligation particulière que nous avons à M:r Öfverbom, qui lui seul a dirigé tous les détails de la partie organique; en effet ce n'est pas la dernière, et je ne prétends pas diminuer par là les obligations que nous avons de même à Mess. Holmquist et Palander; mais le sentiment de Justice me l'a préscrit cette fois, et j'espére qu'on me pardonnera dorénavant d'en avoir toujours évité de nommer personne tant que la nature même du sujet ne l'a rendû indispensable.

II:de Section

Des Opérations Trigonomètriques.

§. 14.

Lorsqu'il s'agit de construire une chaîne de triangles qui doivent combiner par une opération trigonométrique deux points quelconques π et μ (Fig.), il n'est rien de moins indifférent que la position respective des points intermédiaires. Sur tout il faut éviter les triangles trop aigus, tant qu'on en peut obtenir d'autres qui le soient moins; et puisqu'il faut indispensablement qu'on cherche à obtenir deux valeurs au moins pour la distance qu'on s'est proposé de traverser, dont l'une soit absolument indépendante de l'autre, il s'ensuit que la perfection idéale, ou la dernière à la quelle il faut tâcher d'atteindre, seroit une suite de triangles telle que l'un des angles adjacents à la base seroit toujours droit, tandis que les deux autres n'en seroient que la moitié (excepté dans les deux triangles qui aboutissent aux points extrèmes π et μ, dont les angles verticaux doivent être droits, et ceux qui sont adjacents à la base tous les deux = 50°). Faire tout son possible pour s'approcher de cet idéal, ou du moins ne s'en écarter que dans les circonstances les plus urgentes, voila tout ce qui en peut être mis au profit de la pratique, et ce qui nous a dirigé en faisant élever les signaux pendant le prémier voyage durant l'été l'an 1801. Les points, qui avoient été employés auparavant par les Académiciens de France l'an 1736, étoient en général si bien choisis, qu'il n'-y-avoit là dessus rien à faire de mieux (vû les obstacles qui ne peuvent être appercûs que par celui qui en connoit les circonstances locales). En effet les triangles à la hauteur de Huitaperi, Niva et Kakama ne sont pas

aussi ſavorables qu'on l'auroit déſiré, mais il n'-y-avoit pas de moyen d'en avoir d'autres plus avantageux, et les courses que nous fimes exprés, pour découvrir quelque point à souhait du couchant du fleuve de Torneå, furent toutes exécutées en vain. Au contraire lorsqu'il falloit abondonner la suite qui avoit été projettée avant nous, pour avancer plus vers le midi autant que nous le trouverions faisable, il ne nous manquoit en aucune maniére de triangles avantageux, ou tels dont les côtés pouvoient être déterminés en dernière rigueur d'après la base précédemment connûe; mais en revange nous fumes obligés de faire une espèce de coude à la hauteur de Torneå, en faisant tourner toute la suite un peu trop brusquement vers le couchant, sans quoi il auroit fallu perdre de vûe l'avantage d'augmenter par celà l'amplitude de l'arc à mesurer de 36.0 minutes. Un inconvénient semblable à celui dont nous venons de parler nous embarassa de même, quand nous nous efforçames de pénétrer plus vers le nord au delà de Kittis, savoir que nous étions obligés de faire tourner toute la svite un peu trop brusquement vers le couchant, et qu'en outre le dernier triangle qui joint Pahtavara, Askilehto et Teikovara devenoit fort aigu. Quant au prémier, ou ce qui regarde l'erreur qu'on pourroit soupçonner devoir etre attribuée à quelque défaut qui se seroit glissée dans les observations d'azimuth, et qui, sans sortir des limites de la vraisemblance, ne laisseroit pas de produire quelque chose sur une distance de 180827.7 mètres (lorsque l'azimuth est = 39°39′87″2 comme celui de Seskar Furō l'étoit à Mallōrn), il faut remarquer qu'en effet, si π étoit dans le plan du grand cercle qui joint Mallörn avec Seskar Furō, 20 sécondes d'incertitude dans l'azimuth en produiroit $3^{m}296$ dans la distance des parallèles de Mallōrn et de Pahtavara; mais que les points π et μ étant peu s'en faut dans le même méridien, et jusqu' à n'en différer que de très peu de minutes, l'azimuth du point π vû de μ n'est que de quelques minutes, et par conséquent

si nous

si nous le supposons = 10 minutes, toute une minute d'-erreur dans cet élément n'en produiroit que $44^{mm}.6$ dans la distance des parallèles dont il s'agit, ce qui ne répond qu'à 0.0045 seconde d'erreur dans les observations des latitudes. Enfin, pour ce qui est du second, ou ce qui dépend de l'angle aigu du triangle qui joint Teikovara, Askilehto et Pahtavara, il faut observer qu'on en rencontre un également aigu dans celui qui joint Huitaperi, Torneå et Kakamavara; et que toutefois l'excédant de l'erreur qui en pourroit résulter dans les opérations géodésiques s'évanouit en comparaison de l'avantage qui résulte de 37.6 minutes d'augmentation dans l'amplitude de l'arc céleste. Ainsi tout l'arc à parcourir fut augmenté par nous de 73.6 minutes, c'est à dire qu'il fut projeté plus grand que par les Académiciens de France en raison de 1.69 à l'unité; et toute chose d'ailleurs étant supposée égale, il nous sembloit que le dégré de confiance, que mériteroient les résultats à venir des nouvelles opérations, devoient augmenter uniquement à cette raison d'un peu plus de deux tiers.

§. 15.

Une autre affaire qui étoit de la dernière conséquence, et qui ne fut décidée qua'près avoir pesé les raisons qui se pouvoient alléguer de part et d'autre, c'étoit la nature et la construction des signaux qu'il falloit employer pour l'observation des angles horizontaux. Or de toutes les figures, celle d'un pyramide à base quarrée, dont l'axe fut perpendiculaire à l'horizon, nous vint la prémière à l'esprit; mais une réflexion, encore que moins approfondie, sur les phénomènes qui appartiennent à l'optique, et qui ont leur source dans le plus ou moins de lumière que réfléchissent des objets quelconques, nous fit bientôt soupçonner que tout corps solide, par la seule raison qu'il étoit solide, devoit toujours être moins propre à servir de mire. Pour m'expliquer je supposerai qu'il s'agisse d'un cône perpendiculaire à l'horizon, et que ABCD (voyez la

Figure 18) soit l'intersection commune de celuici et d'un plan parallèle à l'horizon. De plus soit E son centre, O l'observateur, S le soleil, et l'angle OES = α = la différence des azimuths du soleil et de l'observateur vûe de E; alors ADC représentera la moitié du signal qui est éclairée par les rayons qui lui viennent directement du soleil, et DAB une autre moitié qui est visible dans le point O, et qui, d'aprés les règles de la projection doit paroître sous la figure d'une ligne droite DENB, dont la partie DEN renvoyera à l'oeil de l'observateur une lumière beaucoup plus éclatante que l'autre partie BN. D'où il s'ensuit, qu'à cause de la proprieté si généralement connûe qu'ont tous les corps rayonnants, de parôitre sous un diamètre trop grand à raison de leur distance, le diamètre apparent de DN sera à celui de BN dans une raison plus grande que celle de la droite DN à BN. Supposant donc que e soit l'effet de l'irradiation de la lumière (c'est à dire l'angle sous lequel DN parôit trop grand étant vû de O), et X le point milieu apparent de la droite DENB; alors BX sera = DX + $\frac{1}{2}$e, ou BE + EX = BE — EX + $\frac{1}{2}$e, et delà EX (ou l'erreur qu'on commet en visant vers le point X) = $\frac{1}{4}$ e. Cette quantité pourroit être déterminée par le calcul, si l'on connoissoit auparavant la nature de la fonction dont e est formé de DN et α, c'est à dire qu'on la pourroit placer au nombre des corrections que nous verrons dans la svite tant de fois devoir être appliquées aux quantités observées, pour en déduire celles qui auroient eû lieu sous de certaines conditions; mais cette dernière ressource nous manque aussi dans cette occasion, vûe l'ignorance où nous sommes concernant la nature de la fonction e. Il n'-y-avoit donc pas d'autre moyen que de chercher de s'en rendre absolument indépendant. Or c'est ce que nous avons espéré pouvoir obtenir en partant de l'idée d'un plan, dont tous les points étant ou dans l'ombre ou dans le jour, et d'ailleurs tous également inclinés aux rayons qui leur viennent du soleil, doivent par cette raison renvoyer à l'oeil de l'observateur

une même quantité de lumière. D'ailleurs nous avions éprouvé à l'observatoire de Stockholm l'extrême rigueur avec la quelle on pouvoit ramener au méridien l'instrument de passage par le moyen d'une mire qui avoit été dressée exprès à une distance d'environ 1400 mètres, et qui consiste dans une ouverture ronde faite dans le plan d'une plaque de fer, au travers la quelle on peut voir le jour réfléchi de l'eau de la rivière qui est au delà. Tout cela nous induisit donc à donner à nos signaux la construction suivante (voyez la Figure 19): KAL représente un tronc d'arbre perpendiculaire à l'horizon d'environ $6^{m}.3$ de hauteur; AB, AC, AD et AE quatre consoles, qui se joignoient toutes à la même hauteur du point A, et qu'on avoit attaché au tronc du milieu KAL par le moyen de gros clous qui traversoient tout l'arbre, de sorte qu'on les pouvoit toujours river de l'autre côté; BCDE la base quarrée que celles-ci faisoient à l'horizon, et qu'on avoit lié par le moyen de BC, CD, DE et EB, qui devoient par conséquent s'opposer à ce que les consoles ne se bougeassent d'avantage; FGHIfghi une croix double, que nous avions de même attaché au tronc du milieu, et aux consoles latérales; O un pivot de fer enfoncé dans le coeur même du tronc KAL autour duquel on pouvoit faire tourner le cadre rectangulaire LNTR librement en tout sens autour de l'horizon. Vers les extrémités de ce cadre on en avoit rempli les espaces rectangulaires LNPM et QRTS de planches de sapin, qu'on avoit brulé auparavant jusqu à ce que leurs surfaces commençoient à se carbonnifier légérement; le milieu en fut laissé tout vide, de sorte que par ce moyen on avoit une ouverture rectangulaire, dont le centre étoit toujours dans la verticale du centre du signal, et au travers la quelle on ne voyoit que le ciel, tant que le signal ne se projetoit en terre. Outre ceci, dont nous venons de faire le rapport, il-y-avoit encore deux autres cadres en forme quarrée semblables à BCDE, dont l'une fut toujours attaché immédiatement au — dessus de la croix FGHI, et l'autre environ $1^{m}.5$ plus haut. Ceuxci n'a-

voient d'autre but, que celui de donner plus de consistance à toute la carcasse; et c'est à dessein que nous les avons omis dans la figure ci jointe, afin de ne la charger de tröp de détails. Tout cela étant fait, on fixa le plan du rectangle LNTR dans une situation convénable, puis on coupa le tronc KAL immédiatement au dessous de la croix FGHI, qui étoit toujours à 2 mètres environ de hauteur au dessus du sol, afin que le cercle répétiteur pourroit être placé au centre même du signal lors de l'observation des angles horizontaux, enfin nous en fimes couvrir le piéd avant que le quitter la station, de sorte que le tout étant vû de loin se présenta comme on le voit dans la figure 20:ème (*).

Ces préparatifs étoient déja en parfait ordre lors de l'automne 1801, de sorte, qu'après avoir achevé la mesure de la base, il ne nous restat, qu'à commencer par l'observation des angles horizontaux, qu'il falloit entreprendre au plutôt. Mais avant que de venir au tableau de ces observations, je vais rassembler les formules de réductions, et les corrections qu'il faut partout employer dans la suite; à commencer par un problême, qu'il me semble

(*) Un illustre savant, de même qu' Astronome observateur, a mis en avant pour décider s'il n'auroit valù mieux nous en tenir à des signaux de feu, qu'il auroit fallû observer pendant la nuit. Personne ne sauroit être plus persuadé que moi, de l'attention que méritent les sentiments d'un homme tel que lui; et je sais à combien de titres on les doit regarder comme des avis précieux pour s'approcher vers cet idéal, qu'on dévant les yeux les Géomètres, et au quel doivent tendre tous les efforts de l'Astronome. Mais cela même m'impose le devoir de remarquer. 1:o Que nous transversions un pays inculte et peu habité, et que par cela les signaux de feu nous auroient causé des dépenses excessives, vû le monde qu'il auroit fallû, pour avoir toujours les signaux éclairés dans le moment où nous en aurions besoin. 2:o Que dans un climat aussi rude que celui de Torneå, l'observation des angles horizontaux auroit été impraticable dans toute autre saison que l'été, et 3:o qu'alors il n'y-a point de nuit à ces hauteurs là.

qu'on ait eû tort à négliger, et qui consiste à trouver le résultat le plus probable qu'annonce une svite, quelconque d'observations faites au moyen du cercle de Borda.

§. 16.

Quiconque s'est tant soit peu rendu familière l'idée du cercle répétiteur de Borda sait, qu'originairement les résultats de l'observation ne sont que des multiples pairs de l'angle qu'on veut observer; c'est à dire, que l'ordre dans lequel ils se suivront sera le double, le quadruple, le sextuple et ainsi de suite. Par conséquent si nous désignons les observations successives par A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, ... A_n, l'angle dont il s'agit sera lui même le résultat de $A_n - A_m$ divisé par deux fois $n - m$. Le plus ou le moins d'exactitude, qu'on peut supposer à cette valeur de $\frac{A_n - A_m}{2(n-m)}$, dépend de deux choses essentiellement distinctes; dont l'une se rapporte à l'exactitude des divisions de l'instrûment dans les point de A_n et A_m, tandisque l'autre dérive de l'erreur qu'on peut attribuer à l'observateur en notant ces points; et qui, sans en supposer trop, pourroit bien monter jusqu'à 20 ou même 30 secondes, vû la précipitation avec laquelle cela se doit faire. Toute fois l'erreur, qui en résultera pour la valeur de l'angle, diminuera à raison que $n - m$ sera plus grande, et sa valeur la plus problable s'obtiendra en laissant à toutes les valeurs de $\frac{A_n - A_m}{2(n-m)}$ le droit de voter en raison de $n - m$. Par ce moyen aucune ne sera censée avoir voté exclusivement ni en point de départ, ni en point final; et le double de ce résultat étant désigné par A, l'on aura $A = \frac{S^2(A_n - A_m)}{S^2(n-m)} = \frac{S(nA_n - SA_{n-1})}{S(n^2 - S(n-1))}$; mais $S.B_r$ est toujours $= \Sigma.B_{r+1}$, quelle que soit la suite dont le

terme général est représenté par B_r, donc $A = \frac{S(nA_n - \Sigma A_n)}{S\left(\frac{n.\overline{n+1}}{2}\right)} = \frac{\Sigma(\overline{n+1}.A_{n+1} - \Sigma A_{n+1})}{\Sigma\left(\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{2}\right)}$; or $\Sigma(\overline{n+1}\ A_{n+1} - \Sigma A_{n+1}) = \overline{n+1}\ \Sigma A_{n+1} - \Sigma^2 A_{n+1} - \Sigma A_{n+1} - \Sigma^2 A_{n+1} = nSA_n = 2S^2 A_{n-1}$, et $\Sigma\left(\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{2}\right) = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\ 2.\ 3.}$, donc $A = \frac{nSA_n - 2S^2 A_{n-1}}{\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\ 2.\ 3.}}$. L'expression que nous venons de trouver pour la valeur de A se déduit aussi de l'equation suivante $A_n + \left(A_{n-1} + (A_n - A_1)\right) + \left(A_{n-2} + (A_{n-1} - A_1) + (A_n - A_2)\right) + \left(A_{n-3} + (A_{n-2} - A_1) + (A_{n-1} - A_2) + (A_n - A_3)\right) + \&c. = A\left(n + 2.\overline{n-1} + 3.\overline{n-2} + 4.\overline{n-3} + \&c.\right)$; or le premier membre de cette équation est $= nA_n + \overline{n-1}\ A_{n-1} + \overline{n-2}\ A_{n-2} + \overline{n-3}\ A_{n-3} + \&c. \ldots + 3A_3 + 2A_2 + A_1 - (n-1)\ A_1 - (n-2)\ A_2 - (n-3)\ A_3 - \&c. \ldots - 3A_{n-3} - 2A_{n-2} - A_{n-1} = nA_n + \overline{n-2}\ A_{n-1} + \overline{n-4}\ A_{n-2} + \overline{n-6}\ A_{n-3} + \&c. = nSA_n - 2\left(A_{n-1} + 2A_{n-2} + 3A_{n-3} + 4A_{n-4} + \&c.\right) = nSA_n - 2\left((A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4} + A_{n-5} + \&c.) + (A_{n-2} + A_{n-3} + A_{n-4} + A_{n-5} + \&c.) + (A_{n-3} + A_{n-4} + A_{n-5} + \&c.) + (A_{n-4} + A_{n-5} + \&c.) + (A_{n-5} + \&c.) + \&c.\right) = nSA_n - 2\left(SA_{n-1} + SA_{n-2} + SA_{n-3} + SA_{n-4} + SA_{n-5} + \&c.\right) = nSA_n - 2S^2 A_{n-1}$, et son second membre $= A\left(n + 2n + 3n + 4n + \&c. \ldots + n^2 - 1.2 - 2.3 - 3.4 - 4.5 - \&c. - \ldots - n.\overline{n-1}\right) =$.

$$A\left(\frac{n^2 \cdot \overline{n+1}}{2} - \frac{\overline{n-1} \cdot n \cdot \overline{n+1}}{3}\right) = A \cdot \frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

donc la valeur de A sera $= \dfrac{nSA_n - 2S^2A_{n-1}}{\frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$. Dans ce qui précède nous avons laissé à toutes les observations le droit de voter pour la détermination de l'angle A; or si on ne le leur laisseroit qu'à commencer par A_e et tous les $A_m - A_{m-e}$, alors A seroit $= \dfrac{S^2(A_n - A_m)}{S^2(n-m)}$ (*) $=$

$$\frac{S(\overline{n-e+1}\, A_n - SA_{n-e})}{S(\overline{n-e+1} \cdot n - S(n-))} =$$

$$\frac{\overline{n-e+1}\, SA_n - S^2A_{n-1} - S^2A_{n-e} + S^2A_{e-2}}{n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} - e \cdot \frac{e-1}{2} \cdot \frac{3n-2e+4}{3}}, \text{ et}$$

(*) En général il faut commencer par intégrer l'expression $\dfrac{A_n - A_m}{n-m}$ depuis la valeur de $m = 1$ jusqu' à celle de $m = n - e$ inclusivement, après quoi on l'intégrera encore une fois, de sorte que ce nouveau intégral s'évanouisse par la supposition de $n = e - 1$. Or, comme il peut arriver que les m ne croissent pas toujours dans l'ordre des nombres en progression Arithmétique, je supposerai pour plus de généralité, qu'ils se svivent dans l'ordre quelconque des nombres m_1, m_2, m_3, m_4, &c. . . . m_r, et que n soit $= m_r$; alors (laissant à toutes les observations le droit de voter) on aura $A = \dfrac{S^2(A_n - A_m)}{S^2(n-m)} =$

$$\frac{S(rA_{m_r} - SA_{m_{r-1}})}{S(rm_r - Sm_{r-1})} = \frac{rSA_{m_r} - 2S^2A_{m_{r-1}}}{rSm_r - 2S^2m_{r-1}}.$$

Nous verrons l'exemple de l'application de cette formule quand nous viendrons à la détermination de la latitude de Mallörn, où nous n'avions noté les observations A_m, qu'à les distances, qui étoient très inégales entre elles.

par conséquent, si on suppose n = 2e, A deviendra =

$$\frac{\overline{e+1}\,SA_n - S^2A_{n-1} - S^2A_e + S^2A_{e-2}}{2e \cdot \overline{e+1} \cdot \frac{e+2}{3}}.$$

Ainsi, prenant pour exemple les observations de l'angle horizontal, que soutendent Seskar Furö et Eyenpoikari Letto à Mallörn, je commence par écrire dans la première colonne la suite des observations mêmes, ou celle des A_m; dans la seconde je mets les différences de chaque observation à celle qui la suit immédiatement, ou les $\triangle A_m = A_{m+1} - A_m$; dans la troisième les sommes de toutes les observations depuis A_1 jusqu'à A_m inclusivement, ou les SA_m; enfin la quatrième contient les sommes de ces sommes, ou les S^2A_m; Puis la cinquième colonne présente le tableau des résultats qu'on obtient successivement, en ne laissant pourtant aux A_m le droit de voter pour la détermination de l'angle A dont il s'agit, qu'à commencer par A_5.

Voici le tableau de ce que nous venons de dire

	A_m	$\triangle A_m$	SA_m	S^2A_m	$\frac{1}{2}$ A
1	73°323	73°322	73°323	73°323	36°66′
2	146°645	18	219°968	293°291	
3	219°965	26	439°931	733°222	
4	293°289	24	733°220	1466°442	
5	366°613	26	1099°833	2566°275	13″000
6	439°939	18	1539°772	4106°047	15″000
7	513°257	22	2053°029	6159°076	13″382
8	586°579	26	2639°608	8798°684	13″000
9	659°905	21	3299°513	12098°197	13″737
10	733°226	23	4032°739	16130°936	13″714
11	806°549	19	4839°288	20970°224	13″648
12	879°868		5719°156	26689°380	13″068

La valeur qui résulte de cette manière pour l'angle $\frac{1}{2}$ A est donc = 36°66′13″068, et celle qu' on obtiendroit en laissant à toutes les observations le droit de voter, depuis A_1 inclusivement seroit = 36°66′12″967, ce qui ne diffère de la précédente que de 0″.101; au lieu qu'en divisant A_{12}, ou

879°868

879°868 par 24, on n'auroit que 36°66′11″667, ce qui en diffère de 1″401. En effet cette différence produit très peu de chose, tant qu'il s'agit des opérations géodésiques; mais en fait des latitudes cela vaudroit 14.01 mètres, ce qui n'est pas sans doute une quantité qu'on puisse négliger dans le calcul, par des considérations de sa petitesse.

§. 17.

L'expression, que nous venons de trouver pour la valeur la plus probable d'un angle observé au moyen du cercle de Borda, n'est encore que le résultat qu'on déduit immédiatement de l'observation; et avant que d'en avoir l'angle horizontal lui même, il faut qu'on y fasse plusieurs corrections, dont la première dérive de la construction de l'instrument: savoir de l'excentricité de la lunette inférieure, laquelle étoit = 38.1 millimètres pour le cercle dont nous nous sommes servi. Pour en déterminer l'effet, supposons que C (voyez la Figure 21) soit le centre du répétiteur, et CA la droite qu'on ait abaissé delà perpendiculairement à l'axe de vision de la lunette inférieure; alors, faisant mouvoir la lunette dont il s'agit sur le limbe qui lui appartient; il s'ensuivra que le point A sera toujours dans un même cercle AEMN. De plus supposons que D soit l'objet à droite, et G l'objet à gauche, dont on ait observé l'angle intercepté à C. Alors, ayant commencé par mettre la lunette supérieure sur D, et l'inférieure sur G, les positions de cellesci seront représentées par CD et BG, et l'angle intercepté par GFD; ensuite faisant tourner le cercle dans son propre plan, et amenant par là la lunette inférieure sur G, la position de cellesci sera représentée par ED; ensorte que, lorsqu' (après avoir mis la lunette supérieure en liberté) on l'aura dirigé sur G, sa position sera représentée par KCG, et l'angle que font les deux lunettes entre elles, par GKD. Par conséquent l'angle, que la lunette supérieure vient de parcourir, sera = GFD + GKD; mais GFD = GCD + CGF,

et GKD = GCD — CDK; donc GFD + GKD = 2GCD + CGF — CDK, et delà GCD = $\frac{1}{2}$ (GFD + GKD) + $\frac{1}{2}$ CDK — $\frac{1}{2}$ CGF. Or $\frac{1}{2}$ (GFD + GKD) est l'angle que nous venons de désigner par $\frac{1}{2}$ A dans l'article précédent, $\frac{1}{2}\,CDK = \frac{\frac{1}{2}\,CA}{CD}$, et $\frac{1}{2}\,CGF = \frac{\frac{1}{2}\,CA}{CG}$; donc la correction, qu'il faut ajouter à la moitié de l'angle A pour avoir GCD, sera égale à la moitié de l'excentricité de la lunette inférieure divisée par la distance de l'objet à droite moins cette quantité divisée par la distance de l'objet à gauche; c'est à dire, que dans le cas actuel, la correction dont il s'agit sera égale à 12127″6 divisées par le nombre des mètres que contient la distance de l'objet à droite moins 12127″6 divisées par le nombre des mètres que contient la distance de l'objet à gauche.

§. 18.

Outre la correction dont nous venons de parler, il-y-en-a quelquefois encore une autre, qui dépend de ce que le répétiteur n'étoit point placé au centre du signal, d'où il falloit observer. Or, pour avoir la valeur de celleci, supposons que A et B (voyez la Figure 22) soient les objets à observer, E le centre du signal, O la situation excentrique du répétiteur, enfin Oa et Ob les perpendiculaires abaissées sur AE et EB; Alors AEB sera = ACB — EAC = AOB + OBC — EAC; mais $OBC = \frac{Ob}{OB} = \frac{Ob}{EB}$ (à cause que EO s'évanouit en comparaison de EB) $= \frac{EO}{EB}$ Sin. BEO, $EAC = \frac{Oa}{OA} = \frac{Oa}{EA} = \frac{EO}{EA}$ Sin. AEO, AEB = l'angle qu'il auroit fallù observer, et AOB = l'angle qu'on a observé effectivement; Donc la correction qu'il faut faire à l'angle observé sera $= \frac{EO}{EB}$ Sin. BEO $- \frac{EO}{EA}$ Sin. AEO. Cette expression comprend tous les cas possibles, pourvû qu'on n'oublie que les angles AEO et BEO doivent être comptés l'un de AE, et l'autre de BE, et tous les deux

de droite à gauche jusqu'à quatre cents dégrés; de même, qu'ayant exprimé AE et BE par le nombre des mètres contenus dans ces distances, il faut substituer au lieu de EO l'angle $636''62$ multiplié par le nombre de millimètres qui exprime la distance du répétiteur au centre du signal.

§. 19.

Il n'arrive presque jamais, que les objets observés soient tous les deux dans l'horizon de la station d'où on les voit; ainsi l'angle intercepté par eux doit encore être corrigé de l'effet de leur élévation pour avoir celui qui auroit lieu à l'horizon. Je suppose donc que O soit l'observateur (voyez la Figure 23), et A son zénith; B et C les objets à observer; AB, AC et BC les grands cercles de la sphère qui joignent A, B et C; enfin je commencerai pour plus de généralité par supposer à AB, BC et AC des valeurs quelconques, et j'en déterminerai la variation qui survient à BC en faisant varier les AB et AC d'une manière quelconque. Pour cela nous aurons $\mathrm{Cosin.}\ BC = \mathrm{Cosin.}\ AB.\ \mathrm{Cosin.}\ AC + \mathrm{Sin.}\ AB.\ \mathrm{Sin.}\ AC.\ \mathrm{Cosin.}\ BAC = \mathrm{Cosin.}\ AB.\ \mathrm{Cosin.}\ AC + \mathrm{Sin.}\ AB.\ \mathrm{Sin.}\ AC - \mathrm{Sin.}\ AB.\ \mathrm{Sin.}\ AC\,(1 - \mathrm{Cosin.}\ A) = \mathrm{Cosin.}\,(AB - AC) - 2\,\mathrm{Sin.}\ AB.\ \mathrm{Sin.}\ AC.\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 = \mathrm{Cosin.}\,(AB - AC) - \mathrm{Cosin.}\,(AB - AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 + \mathrm{Cosin.}\,(AB + AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 = \mathrm{Cosin.}\,(AB - AC).\ \mathrm{Cosin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 + \mathrm{Cosin.}\,(AB + AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2$, et delà $\mathrm{Cosin.}\,(BC + \Delta BC) = (\mathrm{Cosin.}\,(AB - AC + \Delta AB - \Delta AC).\ \mathrm{Cosin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 + \mathrm{Cosin.}\,(AB + AC + \Delta AB + \Delta AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2$, d'où $\mathrm{Cosin.}\ BC - \mathrm{Cosin.}\,(BC + \Delta BC) = \left\{\mathrm{Cosin.}\,(AB - AC) - \mathrm{Cosin.}\,(AB - AC + \Delta AB - \Delta AC)\right\}.\ \mathrm{Cosin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 + \left\{\mathrm{Cosin.}\,(AB + AC) - (\mathrm{Cosin.}\,(AB + AC + \Delta AB + \Delta AC)\right\}\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 = 2\mathrm{Sin.}\,(AB - AC + \tfrac{1}{2}\Delta AB - \tfrac{1}{2}\Delta AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}\Delta AB - \tfrac{1}{2}\Delta AC).\ \mathrm{Cosin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2 + 2\mathrm{Sin.}\,(AB + AC + \tfrac{1}{2}\Delta AB + \tfrac{1}{2}\Delta AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}\Delta AB + \tfrac{1}{2}\Delta AC).\ \mathrm{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}A)^2$. Or

puisque $\text{Cosin. } BC = \text{Cosin. } (AB - AC) - 2\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC.\ \text{Sin. } (\frac{1}{2}A)^2$, il s'ensuit que $2\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC.\ \text{Sin. } (\frac{1}{2}A)^2 = \text{Cosin. } (AB - AC) - \text{Cosin. } BC = 2\text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB - AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AC - AB)$, et $\text{Sin. } (\frac{1}{2}A)^2 = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB - AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AC - AB)}{\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC}$; De même puisque $\text{Cosin. } BC = \text{Cosin. } AB.\ \text{Cosin. } AC + \text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC.\ \text{Cosin. } A = \text{Cosin. } AB.\ \text{Cosin. } AC - \text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC + \text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC\ (1 + \text{Cosin. } A) = \text{Cosin. } (AB + AC) + 2\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC.\ \text{Cosin. } (\frac{1}{2}A)^2$. On aura $2\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC.\ \text{Cosin. } (\frac{1}{2}A)^2 = \text{Cosin. } BC - \text{Cosin. } (AB + AC) = 2\text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB + AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, et par conséquent $\text{Cosin. } (\frac{1}{2}A)^2 = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB + AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BA + AC - BC)}{\text{Sin. } AB.\ \text{Sin. } AC}$.

Donc en substituant ces valeurs au lieu de $\text{Sin. } (\frac{1}{2}A)^2$ et $\text{Cosin. } (\frac{1}{2}A)^2$ il s'ensvivra que $\text{Cosin. } BC - \text{Cosin. } (BC + \Delta BC) = 2\ \text{Cosec. } AB.\ \text{Cosec. } AC. \Big\{ \text{Sin. } (AB - AC + \frac{1}{2}\Delta AB - \frac{1}{2}\Delta AC).\ \text{Sin. } (\frac{1}{2}\Delta AB - \frac{1}{2}\Delta AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB + AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BA + AC - BC) + \text{Sin. } (AB + AC + \frac{1}{2}\Delta AB + \frac{1}{2}\Delta AC).\ \text{Sin. } (\frac{1}{2}\Delta AB + \frac{1}{2}\Delta AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AB - AC).\ \text{Sin. } \frac{1}{2}(BC + AC - AB) \Big\}$; c'est à dire, qu'en supposant $BC = a$, $\Delta BC = u$, et tout le second membre de l'équation précédente $= x\ \text{Sin. } a$, on aura $\text{Cosin. } a - \text{Cosin. } (a + u) = x\ \text{Sin. } a$; Aprés quoi, développant la valeur de u dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de x, celleci deviendra $= U + x\left(\frac{dU}{dx}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)$ + &c. dans la quelle U et $\frac{d^nU}{dx^n}$ sont les valeurs de u et de $\frac{d^nu}{dx^n}$ lorsqu'on y suppose $x = 0$. Or $U = 0$, et en différentiant successivement du $\text{Sin. } (a + u) = dx\ \text{Sin. } a$, $d^2u\ \text{Sin. } (a + u) + du^2\ \text{Cosin. } (a + u) = 0$, $d^3u\ \text{Sin. } (a + u) + 3du\, d^2u\ \text{Cosin. } (a + u) - du^3\ \text{Sin. } (a + u) = 0$, $d^4u\ \text{Sin. } (a + u) + 4du\, d^3u\ \text{Cosin. } (a + u) + 3d^2u^2\ \text{Cosin. } (a + u) - 6du^2 d^2u\ \text{Sin. } (a + u)$

-- d u^4 Cosin. $(a + u) = 0$, &c; donc $\frac{dU}{dx} = 1$, $\frac{d^2U}{dx^2} = -\left(\frac{dU}{dx}\right)^2$. Cotang. a $=$ — Cotang. a, $\frac{d^3U}{dx^3} = -3\left(\frac{dU}{dx}\right).\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)$. Cotang. a $+ \left(\frac{dU}{dx}\right)^3 = 1 + 3$Cotang. a^2 et $\frac{d^4U}{dx^4} = -4\left(\frac{dU}{dx}\right)$. $\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)$. Cotang. a $- 3\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)^2$. Cotang. a $+ 6\left(\frac{dU}{dx}\right)^2$. $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) + \left(\frac{dU}{dx}\right)^4$. Cotang. a $=$ — 4Cotang. a — 12Cotang. a^3 — 3Cotang. a^3 — 6Cotang a + Cotang. a $=$ — 9Cotang. a — 15Cotang. a^3; par conséquent la valeur de u sera $= x - \frac{1}{2}x^2$. Cotang. BC $+ \frac{1}{6}x^3$ (1 + 3Cotang. BC^2) $- \frac{1}{3}x^4$ (3Cotang. BC + 5Cotang. BC^3) &c. Quand on veut déduire de cette expression la correction qu'il faut faire à BC, pour en transporter la valeur observée à celle qui auroit lieu dans l'horizon, il faut supposer que AB et AC se changent en 100°, en les faisant varier de $\triangle$AB et $\triangle$AC; ce qui nous donnera les équations suivantes AB $=$ 100° — $\triangle$AB, AC $=$ 100° — $\triangle$AC, Cosec. AB $=$ Sec. $\triangle$AB, Cosec. AC $=$ Sec. $\triangle$AC, Sin. (AB — AC $+ \frac{1}{2}\triangle$AB $- \frac{1}{2}\triangle$AC) $=$ — Sin. ($\frac{1}{2}\triangle$AB $- \frac{1}{2}\triangle$AC), Sin. ($\frac{1}{2}$ (BC — $\triangle$AB — $\triangle$AC) + 100°) $=$ Sin. $\frac{1}{2}$ (BC + AB + AC) $=$ Cosin. $\frac{1}{2}$ (BC — $\triangle$AB — $\triangle$AC), Sin. $\frac{1}{2}$ (BA + AC — BC) $=$ Sin. (100° — $\frac{1}{2}$ (BC + $\triangle$AB + $\triangle$AC)) $=$ Cosin. $\frac{1}{2}$ (BC + $\triangle$AB + $\triangle$AC), Sin. (AB + AC + $\frac{1}{2}\triangle$AB $+ \frac{1}{2}\triangle$AC) $=$ Sin. (200° — $\frac{1}{2}\triangle$AB — $\frac{1}{2}\triangle$AC) $=$ Sin. ($\frac{1}{2}\triangle$AB $+ \frac{1}{2}\triangle$AC), Sin. $\frac{1}{2}$ (BC + AB — AC) $=$ Sin. $\frac{1}{2}$ (BC + $\triangle$AC — $\triangle$AB), Sin. $\frac{1}{2}$ (BC + AC — AB) $=$ Sin. $\frac{1}{2}$ (BC + $\triangle$AB -- $\triangle$AC); substituant ces valeurs dans l'expression générale que nous avons donné de la valeur de x, on aura pour cas actuel xSin. BC $=$ 2Sec. $\triangle$AB. Sec. $\triangle$AC $\{$ Sin. ($\frac{1}{2}\triangle$AB $+ \frac{1}{2}\triangle$AC$)^2$. Sin. ($\frac{1}{2}$ BC $+ \frac{1}{2}$ ($\triangle$AB — $\triangle$AC)). Sin.

$(\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2}(\triangle AB - \triangle AC)) - \text{Sin.} \frac{1}{2}(\triangle AB - \frac{1}{2}\triangle AC)^2$. Cosin. $(\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2}(\triangle AB + \triangle AC))$. Cosin. $(\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} (\triangle AB + \triangle AC))\}$; mais Sin. $(\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2}(\triangle AB - \triangle AC))$. Sin. $(\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2}(\triangle AB - \triangle AC)) = \text{Sin.} (\frac{1}{2} BC)^2 - \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB - \frac{1}{2}\triangle AC)^2$, et Cosin. $(\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2}(\triangle AB + \triangle AC))$. Cosin. $(\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2}(\triangle AB + \triangle AC)) = \text{Cosin.} (\frac{1}{2} BC)^2 - \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB + \triangle AC)^2$; donc xSin. BC, c'est à dire 2xSin. $(\frac{1}{2} BC)$. Cosin. $(\frac{1}{2} BC)$ sera $= 2\text{Sec.} \triangle AB. \text{Sec.} \triangle AC. \{ \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB + \frac{1}{2}\triangle AC)^2. \text{Sin.} (\frac{1}{2} BC)^2 - \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB - \frac{1}{2}\triangle AC)^2. \text{Cosin.} (\frac{1}{2} BC)^2 \}$, et delà

$$x = \text{Sec.} \triangle AB. \text{Sec.} \triangle AC. \{ \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB + \frac{1}{2}\triangle AC)^2. \text{Tang.} \frac{1}{2} BC - \text{Sin.} (\frac{1}{2}\triangle AB - \frac{1}{2}\triangle AC)^2. \text{Cotang.} \frac{1}{2} BC \}.$$

Au reste la forme de la suite, que nous avons trouvé ci dessus pour la valeur de $\triangle BC$, n'en changera point du tout; et la correction qu'il faudra faire à l'angle observé demeurera tout comme nous l'avons vû déja $= x - \frac{1}{2} x^2$. Cotang. BC $+ \frac{1}{6} x^3 (1 + 3\text{Cotang. } BC^2) - \frac{1}{8} x^4 (3\text{Cotang.} BC + 5\text{Cotang. } BC^3) \pm$ &c. *)

*) Cette expression de la différence finie de BC, prise dans toute sa généralité, pourroit aussi servir à réduire au même instant toutes les observations d'azimuth faites en repétant l'angle compris entre un objet quelconque situé prés de l'horizon, et une étoile prise à volonté. Pour cela supposons que B soit l'objet terrestre dont on ait observé les distances $\{ (BC)_1, (BC)_2, (BC)_3, (BC)_4 \ldots (BC)_{2r} \}$ à l'étoile pour les instans $m_1, m_2, m_3, m_4 \ldots m_{2r}$; soit de plus m l'instant du milieu de ces observations, et BC la distance qui lui répond. Alors il faudra commencer par déterminer au moyen du calcul les distances de l'étoile au zénith qui répondent à $m, m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$

§. 20.

L'angle observé, ayant été, réduit à l'horizon comme nous venons de le voir, n'est encore que celui des plans verticaux qui vont de O jusqu' à B et C; or pour en avoir celui qui est intercepté par les droites qui joignent O avec les piéds des signaux qui sont en B et C, il faut se ressouvenir que ceuxci sont au dessous du plan de l'horizon, qui passe par O, des angles qui sont respectivement égaux à la moitié de l'arc du grand cercle, qui les joigne à O; De sorte, que la correction qu'il faudra encore faire uniquement à cette raison sera $=$ Sin. $(\frac{1}{4}\,OC - \frac{1}{4}\,OB)^2$. Cotang. $\frac{1}{2}\,BC$ — Sin. $(\frac{1}{4}\,OC + \frac{1}{4}\,OB)^2$. Tang. $\frac{1}{2}\,BC$. En effet je n'ai jamais fait usage de celleci, puisque tous les triangles peuvent être resolûs immédiatement en regardant leurs cotés comme des arcs de grand cercle. Or en faisant celà il arrivera toujours que la somme des trois angles excédera 200° d'une quantite qui sera à 200° comme l'aire du triangle dont il s'agit est à toute la surface d'un grand cercle de la terre; c'est à dire, que pour chaque million de mêtres quarrés que contient l'aire du triangle, cet excés

---

m_{2r}, c'est à dire les AC, $(AC)_1$, $(AC)_2$, $(AC)_3$, $(AC)_4$, ... $(AC)_{2r}$, dont les différences à AC seront les $(\triangle AC)_1$, $(\triangle AC)_2$, $(\triangle AC)_3$, $(\triangle AC)_4$ .... $(\triangle AC)_{2r}$. Puis on cherchera les valeurs qui en résultent pour $(\triangle BC)_1$, $(\triangle BC)_2$. $(\triangle BC)_3$, $(\triangle BC)_4$ .... $(\triangle BC)_{2r}$; après quoi l'on aura $BC + (\triangle BC)_1, = (BC)_1$, $BC + (\triangle BC)_2, = (BC)_2$, $BC + (\triangle BC)_3 = (BC)_3$, $BC + (\triangle BC)_4 = (BC)_4$, ... $BC + (\triangle BC)_{2r} = BC_{2r}$, et delà $2r.\,BC + (\triangle BC)_1 + (\triangle BC)_2 + (\triangle BC)_3 + (\triangle BC)_4 \ldots + (\triangle BC)_{2r} = (BC)_1 + (BC)_2 + (BC)_3 + (BC)_4 +$ &c. .... $(BC)_{2r} = A_r$, enfin $BC = \frac{A_r - S(\triangle BC)_{2r}}{2r}$. Mais l'application de cette formule deviendroit fort incommode dans la pratique, et nous en proposerons une autre (quand nous viendrons à traiter des observations Astronomiques) qui aura pour argument les accroissemens de l'angle horaire.

sera = 0''0157 secondes. Supposant donc que ABC (voyez la Figure 24) soit le triangle à resoudre, dont la base AB étant connûe il s'agisse de trouver le côté BC. Alors nous commencerons par supposer AB droite, et le triangle ABC rectiligne, aprés quoi nous chercherons la correction qu'il faut faire à la valeur de BC déterminée dans cette hypothèse, pour avoir celle qui auroit été calculé rigoureusement. Soit donc R le rayon de la terre; alors la surface du triangle sera $= \frac{1}{2} AB^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin. B}}{\text{Sin. C}}$, la surface de la terre $= 4R^2\pi$, et l'excés de la somme des trois angles du triangle sphérique ABC au dessus de $200° = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin. B}}{\text{Sin. C}} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A}'. \text{Sin.} (A' + C')}{\text{Sin. C}'}$, (en désignant par A', B', et C' les valeurs de A, B et C dans le triangle ABC supposé rectiligne) $= \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A+C)}{\text{Sin C}}$; mais en supposant le triangle ABC rectiligne il faut que la somme des trois angles devienne = 200°; retranchant donc également des trois angles le tiers de l'excés dont nous venons de faire mention, il s'ensivra que A' sera $= A - \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A + C)}{\text{Sin. C}}$, $C' = C - \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A + C)}{\text{Sin. C}}$, $\text{Sin. A}' = \text{A Sin.} - \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A+C)}{\text{Sin. C}}$. Cosin. A, $\text{Cosec. C}' = \text{Cosec. C} + \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A + C)}{\text{Sin. C}_3}$. Cosin. C, $\text{Sin. A}'. \text{Cosec. C}' = \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A+C)}{\text{Sin. C}_2} . \frac{\text{Sin. A. Cosin. C} - \text{Sin. C. Cosin. A}}{\text{Sin. C}} = \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 . \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A + C). \text{Sin.} (A - C)}{\text{Sin. C}^3}$, et $(BC)' = \text{AB. Sin. A}'. \text{Cosec. C}' = \text{AB. Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6} \text{AB.} \left(\frac{AB}{R}\right)^2 \frac{\text{Sin. A. Sin.} (A + C) \text{Sin.} (A - C)}{\text{Sin. C}^3}$, Or, en resolvant le triangle ABC dans l'hypothèse, sphérique, on aura Sin.

$\text{Sin.}\ \frac{BC}{R} = \text{Sin.}\left(\frac{AB}{R}\right)\frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. C}} = \frac{AB}{R}\ \text{Sin. A. Cosec. C} - \frac{1}{6}\left(\frac{AB}{R}\right)^3\text{Sin. A. Cosec. C},\ \frac{BC}{R} = \text{Sin.}\left(\frac{BC}{R}\right) + \frac{1}{6}\ \text{Sin.}\left(\frac{BC}{R}\right)^3 = \frac{AB}{R}\ \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6}\left(\frac{AB}{R}\right)^3\ \text{Sin. A}^3\text{. Cosec. C}^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{AB}{R}\right)^3\ \text{Sin. A. Cosec. C} = \frac{AB}{R}.\ \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6}\left(\frac{AB}{R}\right)^3\ \text{Sin. A. Cosec. C}\ \frac{\text{Sin. A}^2 - \text{Sin. C}^2}{\text{Sin. C}^2} = \frac{AB}{R}.\ \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6}\left(\frac{AB}{R}\right)^3\ \frac{\text{Sin. A. Sin.}(A+C).\ \text{Sin.}(A-C)}{\text{Sin. C}^3}$ et delà $BC = AB\ \text{Sin. A. Cosec. C} + \frac{1}{6} AB \left(\frac{AB}{R}\right)^2 \frac{\text{Sin. A. Sin.}(A+C).\ \text{Sin.}(A-C)}{\text{Sin. C}^3}$ ce qui est la même valeur, que nous venons de trouver pour $(BC)'$. D'où l'on voit que le triangle ABC peut étre resolû comme étant parfaitement rectiligne, conformement à ce qu'en annonça le premier Le Gendre dans les memoires de l'Academie Royale pour l'an 1787 page 358.

§. 21.

Ce que nous avons vû jusqu' ici se rapporte tout à la détermination des angles horizontaux; Or ayant achevé cela, nous allons terminer la partie théorique de cette section par des principes généraux du nivellement. Soit donc C (voyez la Fig. 25) le centre de la terre; A et F deux signaux quelconques que l'on est supposé avoir observé l'un de l'autre; ABD le cercle décrit du centre C et dans le plan du triangle CAF, passant par A et coupant CF en B; AE la tangente à ce cercle dans le point A; enfin D = l'angle ACB = la distance des signaux exprimée en arc de grand cercle, H = la hauteur apparente de F au dessus de l'horizon de A = l'angle EAϕ, r_1 = la réfraction terrestre quand on voit l'objet en F du point A = FAϕ, r_2 = la réfraction qui a lieu en voyant A du point F = AFe, et h = la hauteur apparente de A au dessus de l'horizon de F = — (100° — CFe). Alors $CFe = 100° + h = CFA + r_2 = C\phi A + r_1 +$

F

$r_2 = CEA - H + r_1 + r_2 = 100° - D - H + r_1 + r_2$, et delà $r_1 + r_2 = h + H + D$; c'est à dire qu'en supposant $r_1 = r_2$ on auroit $r_1 = \frac{1}{2}(h + H + D)$. En général (désignant par r la réfraction moyenne) les observations du Baromètre, du thermomètre et de l'hygromètre indiquent les coëfficients n_1 et n_2 qui font $r_1 = n_1 . r$ et $r_2 = n_2 . r$, ce qui nous donnera $r = \frac{h + H + D}{n_1 + n_2}$. Une théorie plus approfondie des réfractions nous enseigne que r doit toujours être $= \alpha D$ (α étant un coëfficient constant quelleque soit la valeur de D), et les recherches des Géomêtres physiciens nous ont donné α environ $= 0.08$; donc $BAF = BA\varphi - FA\varphi = BAE + EA\varphi - FA\varphi = \frac{1}{2} D + H - \alpha . D$ c'est à dire, (en n'ayant égard qu'aux réfractions moyennes) $BAF = 0.42 D + H$. Par conséquent, si μ est le nombre de mètres que contient la distance AB, il s'ensvivra que BF sera $= \mu^m (0.42 D + H)$ = la différence des niveaux de A et F.

§. 22.

Ayant démontré les formules de réductions comme nous venons de le voir, nous allons maintenant rapporter les observations mêmes des angles horizontaux; en observant que

μ représentera Mallörn.
E Eyenpoikari Letto.
F Seskar Furö.
h Huituri Tirro.
f Torneå Furö.
θ L'eglise Finnoise de Torneå.
T L'eglise de la ville de Torneå.
k Kallinkangas.
q L'eglise de Kemi.
K Kakamavara.
n Nivavara.

C Huitaperi.
B Niemisby.
b Poiki Torneå.
A Avansaxa.
H Horrilankero.
P Pullingi.
N Niemivara.
a Askilehto.
Q Kittis.
t Teikovara.
G Kåtkåvara.
π Pahtavara.

1. F μ E.

F = — 307″5, E = — 655″

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	73°323	73°323	73°323
2	146.645	219.968	293.291
3	219.963	439.931	733.222
4	293.289	733.220	1466.442
5	366.613	1099.833	2566.275
6	439.939	1539.772	4106.047
7	513.257	2053.029	6159.076
8	586.579	2639.608	8798.684
9	659.905	3299.513	12098.197
10	733.226	4032.739	16130.936
11	806.549	4839.288	20970.224
12	879.868	5719.156	26689.380

FμE = 36°66′13″068 *)
(1) — 0″060
(2) — 40″257
(3) — 0″052
36°65′72″699

*) Dans tout ce qui suivra nous désignerons par (1), la correction pour l'excentricité de la lunette inferieure, la correction pour la réduction au centre du signal, par (2), et celle pour la réduction de l'angle observé à l'horizon par (3).

2. μ E F.

μ = — 377″1. F = + 468″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	143°698	143°698	143°698
2	287.402	431.100	574.798
3	431.102	862.202	1437.000
4	574.793	1436.995	2873.995
5	718.491	2155.486	5029.481
6	862.185	3017.671	8047.152
7	1005.881	4023.552	12070.704
8	1149.585	5173.137	17243.841
9	1293.283	6466.420	23710.261
10	1436.979	7903.399	31613.660
11	1580.674	9484.073	41097.733
12	1724.371	11208.444	52306.177
13	1868.074	13076.518	65382.695
14	2011.768	15088.286	80470.981

	A_m	SA_m	S^2A_m
15	2155°457	17243°743	97714°72$^4_5$
16	2299.158	19542.901	117257.62$_4$
17	2442.858	21985.759	139243.38$_5$
18	2586.552	24572.811	163815.69$_2$
19	2730.256	27302.567	191118.26$_6$
20	2873.957	30176.524	221294.78$_3$
21	3017.653	33194.177	254488.96$_3$
22	3161.353	36355.530	290844.49$_6$
23	3305.053	39660.583	330505.07$_1$
24	3448.752	43109.335	373614.41$_1$
25	3592.445	46701.780	420316.19$_1$
26	3736.140	50437.920	470754.11$_7$
27	3879.846	54317.766	525071.87$_2$
28	4023.539	58341.305	583413.18$_8$
29	4167.231	62508.536	645921.71$_0$
30	4310.926	66819.462	712741.18$_5$
31	4454.623	71274.085	784015.26

μEF = 71°84′88″196.
(1) + 0″511.
(3) — 0″444.
71°84′88″263.

5. FEf.

F = + 417″, f = — 145″7.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	139°156	139°15^6	139°156
2	278.312	417.46^8	556.624
3	417.469	834.93^7	1391.561
4	556.623	1391.56^0	2783.121
5	695.780	2087.34^0	4870.461
6	834.934	2922.27^4	7792.735
7	974.088	3896.36^2	11689.097
8	1113.241	5009.60^3	16698.700
9	1252.396	6261.999	22960.699
10	1391.550	7653.549	30614.248
11	1530.708	9184.257	39798.505
12	1669.868	10854.125	50652.630
13	1809.026	12663.151	63315.781
14	1948.185	14611.336	77927.117
15	2087.337	16698.673	94625.790
16	2226.491	18925.164	113550.954
17	2365.651	21290.815	134841.769
18	2504.805	23795.620	158637.389
19	2643.962	26439.582	185076.971
20	2783.118	29222.700	214299.671
21	2922.275	32144.975	246444.646
22	3061.436	35206.411	281651.057
23	3200.587	38406.998	320058.055
24	3339.741	41746.739	361804.794
25	3478.900	45225.639	407030.433
26	3618.049	48843.688	455874.121

FEf = 69°57′80″003.
(1) — 0″468.
(3) — 0″187.
69°57′79″348.

4. FEθ.

F = + 210″4, θ = — 148″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	146°333	146°333	146°333
2	292.659	438.992	585.325
3	438.983	877.975	1463.300
4	585.308	1463.283	2926.583
5	731.637	2194.920	5121.503
6	877.966	3072.886	8194.389
7	1024.294	4097.180	12291.569
8	1170.618	5267.798	17559.367
9	1316.944	6584.742	24144.109
10	1463.278	8048.020	32192.129
11	1609.599	9657.619	41849.748
12	1755.919	11413.538	53263.286
13	1902.255	13315.793	66579.079
14	2048.584	15364.377	81943.456
15	2194.908	17559.285	99502.741
16	2341.241	19900.526	119403.267
17	2487.564	22388.090	141791.357
18	2633.884	25021.974	166813.331
19	2780.208	27802.182	194615.513
20	2926.528	30728.710	225344.223
21	3072.860	33801.570	259145.793
22	3219.181	37020.751	296166.544

FEθ = 73°16′32″862.
(1) — 0″703.
(3) — 0″077.
73°16′32″082.

5. fEh.

f = — 145″7, h = — 376″4.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	81 881	81°881	81°881
2	163.766	245.647	327.528
3	245.649	491.296	818.824

fEh = 40°94′16″
(1) — 0″023.
(3) — 0″027.
40°94′15″95.

6. μFE.

$\mu = -\ 839''4,\ E = -\ 865''.$

	A_m	SA_m	$S\ A_m$
1	182°984	182°984	182°984
2	365.973	548.957	731.941
3	548.972	1097.929	1829.870
4	731.962	1829.891	3659.761
5	914.945	2744.836	6404.597
6	1097.930	3842.766	10247.363
7	1280.920	5123.686	15371.049
8	1463.916	6587.602	21958.651
9	1646.905	8234.507	30193.158
10	1829.898	10064.405	40257.563
11	2012.888	12077.293	52334.856
12	2195.873	14273.166	66608.022
13	2378.860	16652.026	83260.048
14	2561.852	19213.878	102473.926
15	2744.843	21958.721	124432.647
16	2927.830	24886.551	149319.198
17	3110.826	27997.377	177316.575
18	3293.815	31291.192	208607.767
19	3476.800	34767.992	243375.759
20	3659.785	38427.777	281803.536
21	3842.779	42270.556	324074.092
22.	4025.770	46296.326	370370.418
23	4208.756	50505.082	420875.500
24	4391.752	54896.834	475772.334
25	4574.738	59471.572	535243.906
26	4757.723	64229.295	599473.201
27	4940.713	69170.008	668643.209
28	5123.701	74293.709	742936.918
29	5306.691	79600.400	822537.318
30	5489.682	85090.082	907627.400

$\mu FE = 91°49'47''412.$
(1) $-\ 0''451.$
(3) $+\ 0''997.$
$91°49'47''958.$

7. fFE.

$f = -\ 470''0,\ E = -\ 934''8.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	181°921	181°921	181°921
2	363.849	545.770	727.691
3	545.766	1091.536	1819.227
4	727.690	1819.226	3638.453
5	909.620	2728.846	6367.299
6	1091.545	3820.391	10187.690
7	1273.466	5093.857	15281.547
8	1455.386	6549.243	21830.790
9	1637.309	8186.552	30017.342
10	1819.227	10005.779	40023.121

	A_m	SA_m	S^2A_m
11	2001°146	12006°925	52030°046
12	2183.067	14189.992	66220.038
13	2365.000	16554.992	82775.030
14	2546.927	19101.919	101876.949
15	2728.855	21830.774	123707.723
16	2910.780	24741.554	148449.277
17	3092.701	27834.255	176283.532
18	3274.621	31108.876	207392.408
19	3456.545	34565.421	241957.829
20	3638.470	38203.891	280161.720
21	3820.388	42024.279	322185.999
22	4002.303	46026.582	368212.581
23	4184.224	50210.806	418423.387
24	4366.149	54576.955	473000.342
25	4548.070	59125.025	532125.367
26	4730.000	63855.025	595980.392
27	4911.929	68766.954	664747.346
28	5093.851	73860.805	738608.151
29	5275.779	79136.584	817744.735
30	5457.706	84594.290	902339.025

fFE = 90°96′16″095.
(1) + 0″392.
(3) + 0″071.
90°96′16″558.

8. θFE.

E = — 928″4, θ = — 198″6.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	204°329	204°329	204°329
2	408.647	612.976	817.305
3	612.970	1225.946	2043.251
4	817.294	2043.240	4086.491
5	1021.613	3064.853	7151.344
6	1225.933	4290.786	11442.130
7	1430.257	5721.043	17163.173
8	1634.577	7355.620	24518.793
9	1838.899	9194.519	33713.312
10	2043.227	11237.746	44951.058
11	2247.551	13485.297	58436.355
12	2451.872	15937.169	74373.524
13	2656.200	18593.369	92966.893
14	2860.518	21453.887	114420.780
15	3064.849	24518.736	138939.516
16	3269.174	27787.910	166727.426
17	3473.494	31261.404	197988.830
18	3677.820	34939.224	232928.054
19	3882.134	38821.358	271749.412
20	4086.456	42907.814	314657.226
21	4290.777	47198.591	361855.817
22	4495.103	51693.694	413549.511
23	4699.428	56393.122	469942.633
24	4903.753	61296.875	531239.508
25	5108.074	66404.949	597644.457

	A_m	SA_m	S^2A_m
26	5312°401	71717°350	669361°807
27	5516.722	77234.072	746595.879
28	5721.049	82955.121	829551.000
29	5925.366	88880.487	918431.487
30	6129.690	95010.177	1013441.664

$\theta FE = 102^\circ 16' 15'' 287.$
(1) $+ 0'' 664.$
(3) $+ 0'' 314.$
$102^\circ 16' 16'' 265.$

9. hFE.

$E = - 1016'' 8, \quad h = - 1068'' 6.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	118°794	118°794	118°794
2	237.584	356.378	475.172
3	356.368	712.746	1187.918
4	475.161	1187.907	2375.825
5	593.948	1781.855	4157.680
6	712.731	2494.586	6652.266
7	831.519	3326.105	9978.371
8	950.309	4276.414	14254.785
9	1069.104	5345.518	19600.303
10	1187.888	6533.406	26133.709
11	1306.678	7840.084	33973.793
12	1425.460	9265.544	43239.337
13	1544.250	10809.794	54049.131
14	1663.029	12472.823	66521.954
15	1781.813	14254.636	80776.590
16	1900.603	16155.239	96931.829
17	2019.390	18174.629	115106.458

$hFE = 59^\circ 39' 37'' 295.$
(1) $+ 0'' 610.$
(3) $+ 0'' 866.$
$59^\circ 39' 38'' 771.$

10. TF E.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	213°5025	213°5025	213°5025
2	426.9945	640.4970	853.9995
3	640.4955	1280.9925	2134.9920
4	853.9965	2134.9890	4269.9810
5	1067.4955	3202.4845	7472.4655

TFE = 106°74′94″357.
(1) + 0″687.
(3) + 0″403.
106°74′95″447.

11. FfE.

E = — 946″, F = — 484″.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	78°922	78°922	78°922
2	157.840	236.762	315.684
3	236.762	473.524	789.208
4	315.682	789.206	1578.414
5	394.615	1183.821	2762.235
6	473.533	1657.354	4419.589
7	552.456	2209.810	6629.399
8	631.374	2841.184	9470.583
9	710.291	3551.475	13022.058
10	789.213	4340.688	17362.746
11	868.137	5208.825	22571.571
12	947.056	6155.881	28727.452
13	1025.980	7181.861	35909.313
14	1104.908	8286.769	44196.082
15	1183.834	9470.603	53666.685
16	1262.758	10733.361	64400.046
17	1341.675	12075.036	76475.082
18	1420.603	13495.639	89970.721
19	1499.522	14995.161	104965.882
20	1578.446	16573.607	121539.489
21	1657.368	18230.975	139770.464
22	1736.291	19967.266	159737.730
23	1815.213	21782.479	181520.209
24	1894.139	23676.618	205196.827
25	1973.057	25649.675	230846.502
26	2051.979	27701.654	258548.156
27	2130.902	29832.556	288380.712
28	2209.824	32042.380	320423.092
29	2288.752	34331.132	354754.224
30	2367.672	36698.804	391453.028

FfE = 39°46′12″592.
(1) + 0″076.
(3) — 0″005.
39°46′12″663.

12. hfF.

$F = -610''6,\ h = -605''8.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	244°672	244°672	244°672
2	489.338	734.010	978.682
3	733.994	1468.004	2446.686
4	978.660	2446.664	4893.350
5	1223.327	3669.991	8563.341
6	1467.994	5137.985	13701.326
7	1712.652	6850.637	20551.963
8	1957.321	8807.958	29359.921
9	2201.983	11009.941	40369.862
10	2446.656	13456.597	53826.459
11	2691.317	16147.914	69974.373
12	2935.977	19083.891	89058.264
13	3180.642	22264.533	111322.797
14	3425.307	25689.840	137012.637
15	3669.970	29359.810	166372.447
16	3914.626	33274.436	199646.883
17	4159.293	37433.729	237080.612
18	4403.960	41837.689	278918.301
19	4648.617	46486.306	325404.607
20	4893.277	51379.583	376784.190
21	5137.940	56517.523	433301.713
22	5382.604	61900.127	495201.840
23	5627.272	67527.399	562729.239
24	5871.937	73399.336	636128.575
25	6116.600	79515.936	715644.511
26	6361.261	85877.197	801521.708
27	6605.927	92483.124	894004.832
28	6850.591	99333.715	993338.547
29	7095.252	106428.967	1099767.514
30	7339.905	113768.872	1213536.386
31	7584.569	121353.441	1334889.827

hfF = 122°33′17″363.
(1) — 0″291.
(3) + 0″831.
122°33′17″903.

13. θfh.

$\theta = +1925'',\ h = -452''1.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	214°180	214°180	214°180
2	428.353	642.533	856.713
3	642.522	1285.055	2141.768
4	856.694	2141.749	4283.517
5	1070.867	3212.616	7496.133
6	1285.042	4497.658	11993.791
7	1499.217	5996.875	17990.666
8	1713.397	7710.272	25700.938
9	1927.573	9637.845	35338.783

	A_m	SA_m	S^2A_m
10	2141°744	11779°589	47118°372
11	2355.923	14135.512	61253.884
12	2570.102	16705.614	77959.498
13	2784.270	19489.884	97449.382
14	2998.447	22488.331	119937.713
15	3212.618	25700.949	145638.662
16	3426.791	29127.740	174766.402
17	3640.968	32768.708	207535.110
18	3855.150	36623.858	244158.968
19	4069.327	40693.185	284852.153
20	4283.496	44976.681	329828.834
21	4497.670	49474.351	379303.185
22	4711.842	54186.193	433489.378
23	4926.018	59112.211	492601.589
24	5140.194	64252.405	556853.994
25	5354.372	69606.777	626460.771
26	5568.547	75175.324	701636.095
27	5782.729	80958.053	782594.148
28	5996.901	86954.954	869549.102
29	6211.078	93166.032	962715.134
30	6425.252	99591.284	1062306.418

θfh = 107°08′75″264.
(1) — 0″163.
(3) — 1″032.
107°08′74″069.

14. Tfh.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	230°382	230°382	230°382
2	460.755	691.137	921.519
3	691.131	1382.268	2303.787
4	921.506	2303.774	4607.561
5	1151.886	3455.660	8063.221

Tfh = 115°18′82″571.
(1) + 0″022.
(3) — 1″085.
115°18′81″508.

15. Khf.

$f = -120''8,\ k = +181''8.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
	119°848	119°848	119°848
1	239.703	359.551	479.399
2	359.544	719.095	1198.494
3	479.393	1198.488	2396.982
4	599.236	1797.724	4194.706
5	719.088	2516.812	6711.518
6	838.942	3355.754	10067.272
7	958.786	4314.540	14381.812
8	1078.632	5393.172	19774.984
9	1198.471	6591.643	26366.627
10	1318.322	7909.965	34276.592
11	1438.178	9348.143	43624.735
12	1558.026	10906.169	54530.904
13	1677.876	12584.045	67114.949
14	1797.722	14381.767	81496.716
15	1917.573	16299.340	97796.056
16			

Khf = 59°92'40''133.
(1) — 0''790.
(3) — 0''070.
59°92'39''273.

16. fhE.

$f = -167''2,\ E = -1001''2.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	152°374	152°374	152°374
2	304.749	457.123	609.497
3	457.124	914.247	1523.744
4	609.498	1523.745	3047.489
5	761.874	2285.619	5333.108
6	914.247	3199.866	8532.974
7	1066.623	4266.489	12799.463
8	1219.005	5485.494	18284.957
9	1371.376	6856.870	25141.827
10	1523.755	8380.625	33522.452
11	1676.137	10056.762	43579.214
12	1828.510	11885.272	55464.486
13	1980.881	13866.153	69330.639
14	2133.253	15999.406	85330.045
15	2285.631	18285.037	103615.082
16	2438.010	20723.047	124338.129
17	2590.383	23313.430	147651.559
18	2742.761	26056.191	173707.750
19	2895.136	28951.327	202659.077
20	3047.510	31998.837	234657.914
21	3199.876	35198.713	269856.627
22	3352.250	38550.963	308407.590
23	3504.623	42055.586	350463.176
24	3656.996	45712.582	396175.758

	A_m	SA_m	S^2A_m
25	3809°369	49521°951	445697°709
26	3961.752	53483.703	499181.412
27	4114.128	57597.831	556779.243
28	4266.510	61864.341	618643.584
29	4418.880	66223.221	684926.805
30	4571.247	70854.468	755781.273

fhE = 76°18'75''421.
(1) + 0''390.
(3) — 0''035.
76°18'75''776.

17. θhk.

$\theta = + 1129''$, $k = + 1156''8$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	129°708	129°708	129°708
2	259.411	389.119	518.827
3	389.112	778.231	1297.058
4	518.814	1297.045	2594.103
5	648.519	1945.564	4539.667
6	778.219	2723.783	7263.450
7	907.930	3631.713	10895.163
8	1037.631	4669.344	15564.507
9	1167.334	5836.678	21401.185
10	1297.039	7133.717	28534.902
11	1426.741	8560.458	37095.360
12	1556.445	10116.903	47212.263
13	1686.151	11803.054	59015.317
14	1815.854	13618.908	72634.225
15	1945.560	15564.468	88198.693
16	2075.264	17639.732	105838.425
17	2204.967	19844.699	125683.124
18	2334.674	22179.373	147862.497
19	2464.380	24643.753	172506.250
20	2594.083	27237.836	199744.086
21	2723.792	29961.628	229705.714
22	2853.498	32815.126	262520.840
23	2983.200	35798.326	298319.166
24	3112.900	38911.226	337230.392
25	3242.606	42153.832	379384.224
26	3372.305	45526.137	424910.361
27	3502.008	49028.145	473938.506
28	3631.714	52659.859	526598.365
29	3761.412	56421.271	583019.636
30	3891.114	60312.385	643332.021

θhk = 64°85'20''521.
(1) — 0''065.
(3) + 1''141.
64°85'21''597.

18. fhk.

$f = + 202''5$, $k = + 1274''8$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	214°260	214°260	214°260
2	428.520	642.780	857.040
3	642.779	1285.559	2142.599
4	857.038	2142.597	4285.196
5	1071.303	3213.900	7499.096
6	1285.560	4499.460	11998.556
7	1499.825	5999.285	17997.841
8	1714.084	7713.369	25711.210
9	1928.349	9641.718	35352.928
10	2142.611	11784.329	47137.257
11	2356.877	14141.206	61278.463
12	2571.137	16712.343	77990.806
13	2785.400	19497.743	97488.549
14	2999.665	22497.408	119985.957
15	3213.928	25711.336	145697.293
16	3428.188	29139.524	174836.817
17	3642.446	32781.970	207618.787
18	3856.712	36638.682	244257.469
19	4070.975	40709.657	284967.126

fhk = 107°13′10″465.
(1) — 0″356.
(3) + 0″638.
107°13′18″747.

19. Thf.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	85°861	85°861	85°861
2	171.712	257.573	343.434
3	257.567	515.140	858.574
4	343.425	858.565	1717.139
5	429.282	1287.847	3004.986

Thf = 42°92′79″571.
(1) — 0″383.
(3) — 0″675.
42°92′78″513.

20. fhq.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	223°108	223°108	223°108
2	446.215	669.323	892.431

fhq = 111°55 37″5.
(1) — 0″354.
(3) + 0″637.
111°55′37″783.

21. Kkθ.

K = + 540″, θ = — 780″.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	140°600	140°600	140°600
2	281.198	421.798	562.398
3	421.781	843.579	1405.977

Kkθ = 70°29′70″5.
(1) — 0″411.
(3) — 1″097.
70°29′68″992.

22. θkh.

θ = — 780″, h = — 1655″.

	A_m
1	124°612

θkh = 62°30′60″.
(1) + 0″047.
(3) — 0″675.
62°30′60″722.

23. qθh.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	141°276	141°276	141°276
2	282.542	423.818	565.094

qθh = 70°63′55″.
(1) + 0″070.
(3) + 1″106.
70°63′56″176.

24. Kθk.

$K = + 1140''$, $k = - 232''5$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	202°564	202°564	202°564
2	405.124	607.688	810.252
3	607.694	1215.382	2025.634
4	810.253	2025.635	4051.269
5	1012.821	3038.456	7089.725
6	1215.377	4253.833	11343.558
7	1417.946	5671.779	17015.337
8	1620.512	7292.291	24307.628
9	1823.078	9115.369	33422.997
10	2025.647	11141.016	44564.013
11	2228.222	13369.238	57933.251
12	2430.785	15800.023	73733.274
13	2633.352	18433.375	92166.649
14	2835.920	21269.295	113435.944
15	3038.491	24307.786	137743.730
16	3241.062	27548.848	165292.578
17	3443.636	30992.484	196285.062
18	3646.205	34638.689	230923.751
19	3848.778	38487.467	269411.218
20	4051.341	42538.808	311950.026
21	4253.910	46792.718	358742.744
22	4456.476	51249.194	409991.938
23	4659.045	55908.239	465900.177
24	4861.608	60769.847	526670.024
25	5064.172	65834.019	592504.043
26	5266.725	71100.744	663604.787
27	5469.287	76570.031	740174.818
28	5671.844	82241.875	822416.693
29	5874.412	88116.287	910532.980
30	6076.971	94193.258	1004726.238
1	202.561	202.561	202.561
2	405.127	607.688	810.249
3	607.695	1215.383	2025.632
4	810.260	2025.643	4051.275
5	1012.825	3038.468	7089.743
6	1215.390	4253.858	11343.601
7	1417.957	5671.815	17015.416
8	1620.528	7292.343	24307.759
9	1823.085	9115.428	33423.187
10	2025.655	11141.083	44564.270
11	2228.218	13369.301	57933.571
12	2430.788	15800.089	73733.660
13	2633.355	18433.444	92167.104
14	2835.918	21269.362	113436.466
15	3038.480	24307.842	137744.308
16	3241.055	27548.897	165293.205
17	3443.627	30992.524	196285.729
18	3646.188	34638.712	230924.441
19	3848.753	38487.465	269411.906
20	4051.325	42538.790	311950.696

$K\theta k = 101°28'32''923.$
(1) $+ 0''373.$
(2) $- 8''726.$
(3) $- 0''395.$
$101°28'24''175.$

25. $h\theta f.$

$h = - 2060''$, $f = - 2325''$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	101°265	101°265	101°265
2	202.531	303.796	405.061
3	303.797	607.593	1012.654
4	405.064	1012.657	2025.311
5	506.326	1518.983	3544.294
6	607.594	2126.577	5670.871
7	708.859	2835.436	8506.307
8	810.131	3645.567	12151.874
9	911.395	4556.962	16708.836
10	1012.662	5569.624	22278.460
11	1113.925	6683.549	28962.009
12	1215.202	7898.751	36860.760
13	1316.475	9215.226	46075.986
14	1417.753	10632.979	56708.965
15	1519.025	12152.004	68860.969
16	1620.305	13772.309	82633.278
17	1721.576	15493.885	98127.163
18	1822.850	17316.735	115443.898

$h\theta f = 50°63'45''893.$
(1) $+ 0''454.$
(2) $- 34''488.$
(3) $+ 3''106.$
$50°63'14''965.$

26. $k\theta h.$

$k = - 232''5$, $h = - 2055''$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	145°685	145°685	145°685
2	291.377	437.062	582.747
3	437.068	874.130	1456.877
4	582.754	1456.884	2913.761
5	728.448	2185.332	5099.093
6	874.136	3059.468	8158.561
7	1019.822	4079.290	12237.851

	A_m	SA_m	S^2A_m
8	1165°507	5244°797	17482°648
9	1311.192	6555.989	24038.637
10	1456.885	8012.874	32051.511
11	1602.572	9615.446	41666.957
12	1748.259	11363.705	53030.662
13	1893.946	13257.651	66288.313
14	2039.633	15297.284	81585.597
15	2185.321	17482.605	99068.202
16	2331.006	19813.611	118881.813
17	2476.692	22290.303	141172.116
18	2622.377	24912.680	166084.796
19	2768.075	27680.755	193765.551
20	2913.766	30594.521	224360.072
21	3059.465	33653.986	258014.058
22	3205.153	36859.139	294873.197
23	3350.845	40209.984	335083.181
24	3496.540	43706.524	378789.705
25	3642.230	47348.754	426138.459
26	3787.916	51136.670	477275.129
27	3933.600	55070.270	532345.399
28	4079.295	59149.565	591494.964
29	4224.990	63374.555	654869.519
30	4370.671	67745.226	722614.745
1	145.689	145.689	145.689
2	291.386	437.075	582.764
3	437.084	874.159	1456.923
4	582.763	1456.922	2913.845
5	728.454	2185.376	5099.221
6	874.143	3059.519	8158.740
7	1019.832	4079.351	12238.091
8	1165.512	5244.863	17482.954
9	1311.184	6556.047	24039.001
10	1456.876	8012.923	32051.924
11	1602.560	9615.483	41667.407
12	1748.251	11363.734	53031.141
13	1893.935	13257.669	66288.810
14	2039.623	15297.292	81586.102
15	2185.300	17482.592	99068.694
16	2330.991	19813.583	118882.277
17	2476.686	22290.269	141172.546
18	2622.377	24912.646	166085.192

$k\theta h = 72°84'40''179.$

(1) $+ 0''019.$

(2) $+ 7''360.$

(3) $- 0''967.$

$72°84'46''591.$

27. F θ h.

F = — 1820″, h = — 2055″.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	137°710	137°710	137°710
2	275.431	413.141	550.851
3	413.143	826.284	1377.135
4	550.848	1377.132	2754.267
5	688.562	2065.694	4819.961
6	826.269	2891.963	7711.924
7	963.977	3855.940	11567.864
8	1101.690	4957.630	16525.494
9	1239.398	6197.028	22722.522
10	1377.106	7574.134	30296.656
11	1514.812	9088.946	39385.602
12	1652.524	10741.470	50127.072
13	1790.229	12531.699	62658.771
14	1927.938	14459.637	77118.408
15	2065.648	16525.285	93643.693
16	2203.358	18728.643	112372.336
17	2341.070	21069.713	133442.049
18	2478.781	23548.494	156990.543
19	2616.498	26164.992	183155.535
20	2754.206	28919.198	212074.733
21	2891.914	31811.112	243885.845
22	3029.627	34840.739	278726.584
23	3167.335	38008.074	316734.658
24	3305.047	41313.121	358047.779
25	3442.758	44755.879	402803.658
26	3580.472	48336.351	451140.009
27	3718.185	52054.536	503194.545
28	3855.895	55910.431	559104.976
29	3993.604	59904.035	619009.011
30	4131.312	64035.347	683044.358

F θ h = 68° 85′ 50″ 735.

(1) — 0″ 272.

(2) — 27″ 877.

(3) + 3″ 505.

68° 85′ 26″ 091.

28. E θ h.

E = — 2165″, h = — 2060″.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	88°356	88°356	88°356
2	176.717	265.073	353.429

$E\theta h = 44^\circ 17' 92'' 5.$
(1) $-\ 0'' 312.$
(2) $-\ 18'' 608.$
(3) $+\ 2'' 521.$
$44^\circ 17' 76'' 101.$

29. $C\theta K.$

$C = +\ 25''$, $K = +\ 1310''$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	50°813	50°813	50°813
2	101.628	152.441	203.254
3	152.445	304.886	508.140
4	203.260	508.146	1016.286
5	254.077	762.223	1778.509
6	304.890	1067.113	2845.622
7	355.697	1422.810	4268.432
8	406.508	1829.318	6097.750
9	457.318	2286.636	8384.386
10	508.135	2794.771	11179.157
11	558.943	3353.714	14532.871
12	609.756	3963.470	18496.341
13	660.579	4624.049	23120.390
14	711.395	5335.444	28455.834
15	762.210	6097.654	34553.488
16	813.027	6910.681	41464.169
17	863.837	7774.518	49238.687
18	914.647	8689.165	57927.852
19	965.461	9654.626	67582.478
20	1016.279	10670.905	78253.383
1	50.814	50.814	50.814
2	101.626	152.440	203.254
3	152.440	304.880	508.134
4	203.252	508.132	1016.266
5	254.063	762.195	1778.461
6	304.874	1067.069	2845.530
7	355.681	1422.750	4268.280
8	406.493	1829.243	6097.523
9	457.308	2286.551	8384.074
10	508.123	2794.674	11178.748
11	558.933	3353.607	14532.355
12	609.744	3963.351	18495.706

$C\theta K = 25^\circ 40' 63'' 713.$
(1) $+\ 0'' 105.$
(2) $+\ 0'' 170.$
(3) $-\ 3'' 065.$
$25^\circ 40' 60'' 923.$

30. n θ K.

n = + 230″, K = + 1225″.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	40°777	40°777	40°777
2	81.556	122.333	163.110
3	122.330	244.663	407.773
4	163.104	407.767	815.540
5	203.875	611.642	1427.182
6	244.657	856.299	2283.481
7	285.440	1141.739	3425.220
8	326.207	1467.946	4893.166
9	366.986	1834.932	6728.098
1	40.776	40.776	40.776
2	81.552	122.328	163.104
3	122.331	244.659	407.763
4	163.110	407.769	815.532
5	203.885	611.654	1427.186
6	244.659	856.313	2283.499
7	285.431	1141.744	3425.243
8	326.209	1467.953	4893.196
9	366.987	1834.940	6728.136
10	407.757	2242.697	8970.833
11	448.528	2691.225	11662.058
12	489.304	3180.529	14842.587
13	530.079	3710.608	18553.195
14	570.860	4281.468	22834.663
15	611.638	4893.106	27727.769
16	652.414	5545.520	33273.289
17	693.189	6238.709	39511.998
18	733.966	6972.675	46484.673
19	774.741	7747.416	54232.089
20	815.513	8562.929	62795.018
21	856.290	9419.219	72214.237
22	897.066	10316.285	82530.522
23	937.838	11254.123	93784.645
24	978.619	12232.742	106017.387
25	1019.400	13252.142	119269.529
26	1060.172	14312.314	133581.843
27	1100.946	15413.260	148995.103
28	1141.722	16554.982	165550.085
29	1182.497	17737.479	183287.564
30	1223.268	18960.747	202248.311
31	1264.046	20224.793	222473.104
32	1304.813	21529.606	244002.710
33	1345.595	22875.201	266877.911
34	1386.373	24261.574	291139.485
35	1427.152	25688.726	316828.211
36	1467.923	27156.649	343984.860

n θ K = 20°38′78″453.

(1) — 0″014.

(2) — 0″906.

(3) — 2″273.

20°38′75″260.

31. $nK\theta$.

$\theta = -3946''0,\ n = -3831''4.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	164°319	164°319	164°319
2	328.632	492.951	657.270
3	492.947	985.898	1643.168
4	657.258	1643.156	3286.324
5	821.562	2464.718	5751.042
6	985.871	3450.589	9201.631
7	1150.181	4600.770	13802.401
8	1314.495	5915.265	19717.666
9	1478.812	7394.077	27111.743
10	1643.118	9037.195	36148.938
11	1807.425	10844.620	46993.558
12	1971.731	12816.351	59809.909
13	2136.042	14952.393	74762.302
14	2300.351	17252.744	92015.046
15	2464.657	19717.401	111732.447
16	2628.966	22346.367	134078.814
17	2793.279	25139.646	159218.460

$nK\theta = 82°15'49''713.$
(1) $+ 0''760.$
(3) $+ 17''877.$
$82°15'68''350.$

32. kKn.

$k = -3721''3,\ n = -3859''3.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	221°147	221°147	221°147
2	442.297	663.444	884.591
3	663.448	1326.892	2211.483
4	884.599	2211.491	4422.974
5	1105.761	3317.252	7740.226
6	1326.897	4644.149	12384.375
7	1548.044	6192.193	18576.568
8	1769.189	7961.382	26537.950
9	1990.325	9951.707	36489.657
10	2211.472	12163.179	48652.836
11	2432.627	14595.806	63248.642
12	2653.780	17249.586	80498.228
13	2874.929	20124.515	100622.743
14	3096.084	23220.599	123843.342
15	3317.234	26537.833	150381.175
16	3538.372	30076.205	180457.380
17	3759.515	33835.720	214293.100
18	3980.665	37816.385	252109.485
19	4201.811	42018.196	294127.681

kKn = 110°57′40″026.
(1) + 0″797.
(3) + 26″659.
110°57′67″482.

33. nKC.

n = — 3863″3, C = — 685″8.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	101°861	101°861	101°861
2	203.720	305.581	407.442
3	305.581	611.162	1018.604
4	407.439	1018.601	2037.205
5	509.297	1527.898	3565.103
6	611.149	2139.047	5704.150
7	713.014	2852.061	8556.211
8	814.869	3666.930	12223.141
9	916.725	4583.655	16806.796
10	1018.581	5602.236	22409.032
11	1120.439	6722.675	29131.707
12	1222.292	7944.967	37076.674
13	1324.143	9269.110	46345.784
14	1425.999	10695.109	57040.893
15	1527.859	12222.968	69263.861
16	1629.721	13852.689	83116.550
17	1731.575	15584.264	98700.814
18	1833.435	174[illegible]7.699	116118.513
19	1935.295	19352.994	135471.507
20	2037.155	21390.149	156861.656

nKC = 50°92′85″368.
(1) — 0″564.
(3) — 5″942.
50°92′79″862.

34. NKC.

N = — 1521″6, C = — 680″0.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	118°771	118°771	118°771
2	237.538	356.309	475.080
3	356.311	712.620	1187.700
4	475.081	1187.701	2375.401
5	593.844	1781.545	4156.946
6	712.616	2494.161	6651.107
7	831.389	3325.550	9976.657
8	950.156	4275.706	14252.363
9	1068.925	5344.631	19596.994

	A_m	SA_m	S^2A_m
10	1187°689	6532°320	26129°314
11	1306.458	7838.778	33968.092
12	1425.222	9264.000	43232.092
13	1543.995	10807.995	54040.087
14	1662.764	12470.759	66510.846
15	1781.532	14252.291	80763.137
16	1900.296	16152.587	96915.724
17	2019.070	18171.657	115087.381
18	2137.839	20309.496	135396.877
19	2256.607	22566.103	157962.980
20	2375.371	24941.474	182904.454
21	2494.144	27435.618	210340.072
22	2612.910	30048.528	240388.600
23	2731.680	32780.208	273168.808
24	2850.452	35630.660	308799.468
25	2969.219	38599.879	347399.347
26	3087.987	41687.866	389087.213
27	3206.754	44894.620	433981.833
28	3325.520	48220.140	482201.973
29	3444.294	51664.434	533866.407
30	3563.064	55227.498	589093.905

NKC = 59°38′42″835.
(1) — 0″298.
(3) + 0″406.
59°38′42″943.

35. CKH.

H = — 859″8, C = — 643″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	97°238	97°238	97°238
2	194.470	291.708	388.946
3	291.714	583.422	972.368
4	388.948	972.370	1944. 38
5	486.182	1458.552	3403.290
6	583.412	2041.964	5445.254
7	680.665	2722.629	8167.883
8	777.890	3500.519	11668.402

CKH = 48°61′82″5.
(1) — 0″219.
(3) + 0″311.
48°61′82″592.

36. nKT.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	161°402	161°402	161°402
2	322.808	484.210	645.612
3	484.216	968.426	1614.038
4	645.617	1614.043	3228.081
5	807.024	2421.067	5649.148

nKT = 80°70′24″714.
(1) + 0″738.
(3) + 18″031.
80°70′43″483.

37. θnK.

$\theta = -2805''9$, $K = +3467''4$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	194°920	194°920	194°920
2	389.839	584.759	779.679
3	584.752	1169.511	1949.190
4	779.673	1949.184	3898.374
5	974.595	2923.779	6822.153
6	1169.517	4093.296	10915.449
7	1364.433	5457.729	16373.178
8	1559.354	7017.083	23390.261
9	1754.274	8771.357	32161.618
10	1949.199	10720.556	42882.174
11	2144.116	12864.672	55746.846
12	2339.040	15203.712	70950.558
13	2533.959	17737.671	88688.229
14	2728.880	20466.551	109154.780
15	2923.798	23390.349	132545.129
16	3118.713	26509.062	159054.191
17	3313.634	29822.696	188876.887
18	3508.546	33331.242	222208.129
19	3703.465	37034.707	259242.836
20	3898.388	40933.095	300175.931
21	4093.300	45026.395	345202.326
22	4288.218	49314.613	394516.939
23	4483.127	53797.740	448314.679
24	4678.050	58475.790	506790.469
25	4872.964	63348.754	570139.223
26	5067.888	68416.642	638555.865
27	5262.804	73679.446	712235.311
28	5457.722	79137.168	791372.479
29	5652.643	84789.811	876162.290
30	5847.567	90637.378	966799.668

θnK = 97°45′93″486.
(1) — 0″746.
(3) — 15″873.
97°45′76″867.

38. CnK.

C = + 1646″0, K = + 3407″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	235°402	235°402	235°402
2	470.799	706.201	941.603
3	706.200	1412.401	2354.004
4	941.596	2353.997	4708.001
5	1176.998	3530.995	8238.996
6	1412.398	4943.393	13182.389
7	1647.803	6591.196	19773.585
8	1883.205	8474.401	28247.986
9	2118.607	10593.008	38840.994
10	2354.000	12947.008	51788.002
11	2589.399	15536.407	67324.409
12	2824.798	18361.205	85685.614
13	3060.199	21421.404	107107.018
14	3295.599	24717.003	131824.021
15	3530.991	28247.994	160072.015
16	3766.393	32014.387	192086.402
17	4001.789	36016.176	228102.578
18	4237.187	40253.363	268355.941
19	4472.585	44725.948	313081.889
20	4707.979	49433.927	362515.816
21	4943.381	54377.308	416893.124
22	5178.781	59556.089	476449.213
23	5414.181	64970.270	541419.483
24	5649.572	70619.842	612039.325
25	5884.971	76504.813	688544.138
26	6120.371	82625.184	771169.322
27	6355.776	88980.960	860150.282
28	6591.174	95572.134	955722.416
29	6826.573	102398.707	1058121.123
30	7061.971	109460.678	1167581.801

CnK = 117°69′93″986.
(1) + 0″378.
(3) + 12″372.
117°70′06″736.

39. KnH.

K = + 3477″8, H = + 77″2.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	164°402	164°402	164°402
2	328.792	493.194	657.596
3	493.191	986.385	1643.981
4	657.583	1643.968	3287.949
5	821.982	2465.950	5753.899
6	986.372	3452.322	9206.221
7	1150.770	4603.092	13809.313
8	1315.158	5918.250	19727.563
9	1479.562	7397.812	27125.375
10	1643.962	9041.774	36167.149
11	1808.356	10850.130	47017.279
12	1972.747	12822.877	59840.156
13	2137.144	14960.021	74800.177
14	2301.547	17261.568	92061.745
15	2465.936	19727.504	111789.249
16	2630.327	22357.831	134147.080
17	2794.725	25152.556	159299.636
18	2959.117	28111.673	187411.309
19	3123.516	31235.189	218646.498
20	3287.917	34523.106	253169.604

KnH = 82°19′77″684.
(1) + 0″795.
(3) — 2″290.
82°19′76″189.

40. AnK.

A = — 994″7, K = + 3477″8.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	212°251	212°251	212°251
2	424.502	636.753	849.004
3	636.751	1273.504	2122.508
4	849.013	2122.517	4245.025
5	1061.262	3183.779	7428.804
6	1273.514	4457.293	11886.097
7	1485.764	5943.057	17829.154
8	1698.004	7641.061	25470.215
9	1910.253	9551.314	35021.529
10	2122.503	11673.817	46695.346
11	2334.751	14008.568	60703.914
12	2547.004	16555.572	77259.486
13	2759.250	19314.822	96574.308
14	2971.504	22286.326	118860.634
15	3183.751	25470.077	144330.711
16	3396.005	28866.082	173196.793
17	3608.255	32474.337	205671.130

	A_m	SA_m	S^2A_m
18	3820°503	36294°340	241965°970
19	4032.756	40327.596	282293.566
20	4245.008	44572.604	326866.170

AnK = 106°12′49″614.
(1) + 0″741.
(3) − 4″468.
106°12 45″887.

41. TnK.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	194°960	194°960	194°960
2	389.927	584.887	779.847
3	584.890	1169.777	1949.624
4	779.853	1949.630	3899.254
5	974.817	2924.447	6823.701

TnK = 97°48′18″143.
(1) − 0″720.
(3) − 18″218.
97°47′99″145.

42. nCK.

n = − 3005″6, K = − 924″7.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	62°752	62°752	62°752
2	125.504	188.256	251.008
3	188.256	376.512	627.520
4	251.013	627.515	1255.035
5	313.760	941.275	2196.310
6	376.515	1317.790	3514.100
7	439.268	1757.058	5271.158
8	502.018	2259.076	7530.234
9	564.766	2823.842	10354.076
10	627.518	3451.360	13805.436
11	690.266	4141.626	17947.062
12	753.015	4894.641	22841.703
13	815.767	5710.408	28552.111
14	878.512	6588.920	35141.031
15	941.260	7530.180	42671.211
16	1004.012	8534.192	51205.403
17	1066.763	9600.955	60806.358
18	1129.512	10730.467	71536.825
19	1192.266	11922.733	83459.558
20	1255.016	13177.749	96637.307

	A_m	SA_m	S^2A_m
21	1317°765	14495°514	111132°821
22	1380.515	15876.029	127008.850
23	1443.265	17319.294	144328.144
24	1506.017	18825.311	163153.455
25	1568.766	20394.077	183547.532
26	1631.516	22025.593	205573.125
27	1694.260	23719.853	229292.978
28	1757.010	25476.863	254769.841
29	1819.757	27296.620	282066.461
30	1882.509	29179.129	311245.590

$nCK = 31°37'50''941.$
(1) $+ 0''186.$
(2) $- 5''234.$
$31°37'45''893.$

43. θCK.

$\theta = - 4587''9, \quad K = - 986''0.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	83°026	83°026	83°026
2	166.062	249.088	332.114
3	249.084	498.172	830.286
4	332.105	830.277	1660.563
5	415.135	1245.412	2905.975
6	498.160	1743.572	4649.547
7	581.181	2324.753	6974.300
8	664.210	2988.963	9963.263
9	747.235	3736.198	13699.461
10	830.261	4566.459	18265.920
11	913.285	5479.744	23745.664
12	996.310	6476.054	30221.718
13	1079.340	7555.394	37777.112
14	1162.364	8717.758	46494.870
15	1245.388	9963.146	56458.016
16	1328.408	11291.554	67749.570
17	1411.435	12702.989	80452.559
18	1494.458	14197.447	94650.006
19	1577.483	15774.930	110424.936
20	1660.510	17435.440	127860.376
21	1743.533	19178.973	147039.349
22	1826.560	21005.533	168044.882
23	1909.577	22915.110	190959.992
24	1992.606	24907.716	215867.708
25	2075.629	26983.345	242851.053
26	2158.653	29141.998	271993.051
27	2241.682	31383.680	303376.731
28	2324.700	33708.380	337085.111
29	2407.724	36116.104	373201.215
30	2490.748	38606.852	411808.067

θCK = 41°51′24″113.
(1) — 0″301.
(3) — 10″943.
41°51′12″869.

44. BCA.

B = — 12451″8, A = + 1196″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	121°466	121°466	121°466
2	242.942	364.408	485.874
3	364.412	728.820	1214.694
4	485.877	1214.697	2429.391
5	607.342	1822.039	4251.430
6	728.811	2550.850	6802.280
7	850.281	3401.131	10203.411
8	971.751	4372.882	14576.293
9	1093.220	5466.102	20042.395
10	1214.696	6680.798	26723.193
11	1336.157	8016.955	34740.148
12	1457.635	9474.590	44214.738
13	1579.100	11053.690	55268.428
14	1700.571	12754.261	68022.689
15	1822.041	14576.302	82598.991
16	1943.512	16519.814	99118.805
17	2064.981	18584.795	117703.600
18	2186.447	20771.242	138474.842
19	2307.920	23079.162	161554.004
20	2429.390	25508.552	187062.556
21	2550.857	28059.409	215121.965
22	2672.328	30731.737	245854.702
23	2793.799	33525.536	279379.238
24	2915.270	36440.806	315820.044
25	3036.739	39477.545	355297.589
26	3158.215	42635.760	397933.349
27	3279.682	45915.442	443848.791
28	3401.148	49316.590	493165.381
29	3522.620	52839.210	546004.591
30	3644.090	56483.300	602487.891

BCA = 60°73′48″626.
(1) — 1″106.
(3) — 1′15″867.
60°72′31″653.

45. ACK.

$A = + 1352''5,\ K = - 1070''7.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	291°366	291°366	291°366
2	582.720	874.086	1165.452
3	874.081	1748.167	2913.619
4	1165.440	2913.607	5827.226
5	1456.801	4370.408	10197.634
6	1748.153	6118.561	16316.195
7	2039.506	8158.067	24474.262
8	2330.862	10488.929	34963.191
9	2622.223	13111.152	48074.343
10	2913.577	16024.729	64099.372
11	3294.939	19229.668	83328.740
12	3496.296	22725.964	106054.704
13	3787.651	26513.615	132568.319
14	4079.015	30592.630	163160.949
15	4370.375	34963.005	198123.954
16	4661.733	39624.738	237748.692
17	4953.094	44577.832	282326.524
18	5244.455	49822.287	332148.811
19	5535.808	55358.095	387506.906
20	5827.168	61185.263	448692.169
21	6118.527	67303.790	515995.959
22	6409.884	73713.674	589709.633
23	6701.247	80414.921	670124.554
24	6992.601	87407.522	757532.076
25	7283.965	94691.487	852223.563
26	7575.326	102266.813	954490.376
27	7866.687	110133.500	1064623.876
28	8158.041	118291.541	1182915.417
29	8449.400	126740.942	1309656.358
30	8740.756	135481.697	1445138.055

ACK = 145°67'92''543.
(1) — 0''174.
(3) — 0''980.
145°67'91''389.

46. ACH.

$A = + 1398''8,\ H = - 201''9.$

	A_m	AS_m	S^2A_m
1	68°764	68°764	68°764
2	137.523	206.287	275.051
3	206.288	412.575	68[illegible].626
4	275.055	687.630	1375.256
5	343.810	1031.440	2406.696

	A_m	SA_m	S^2A_m
6	412°577	1444°017	3850°713
7	481.337	1925.354	5776.067
8	550.097	2475.451	8251.518
9	618.862	3094.313	11345.831
10	687.626	3781.939	15127.770
11	756.390	4538.329	19666.099
12	825.155	5363.584	25029.683
13	893.915	6257.499	31287.182
14	962.675	7220.174	38507.356
15	1031.442	8251.616	46758.972
16	1100.204	9351.820	56110.792
17	1168.966	10520.786	66631.578
18	1237.734	11758.520	78390.098
19	1306.498	13065.018	91455.116
20	1375.258	14440.276	105895.392
21	1444.021	15884.297	121779.689
22	1512.781	17397.078	139176.767
23	1581.553	18978.631	158155.398
24	1650.312	20628.943	178784.341
25	1719.073	22348.016	201132.357
26	1787.833	24135.849	225268.206

ACH = 34°38′14″654.
(1) − 0″255.
(2) + 6″848.
(3) − 3″479.
34°38′17″768.

47. 200° − bBC.

$b = -\ 1208''4,\quad C = +\ 12187''7.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	151°233	151°233	151°233
2	302.477	453.710	604.943
3	453.715	907.425	1512.368
4	604.953	1512.378	3024.746
5	756.192	2268.570	5293.316
6	907.429	3175.999	8469.315
7	1058.674	4234.673	12703.988
8	1209.914	5444.587	18148.575
9	1361.152	6805.739	24954.314
10	1512.383	8318.122	33272.436
11	1663.622	9981.744	43254.180
12	1814.860	11796.604	55050.784
13	1966.096	13762.700	68813.484
14	2117.335	15880.035	84693.519
15	2268.576	18148.611	102842.130
16	2419.815	20568.426	123410.556
17	2571.051	23139.477	146550.033
18	2722.285	25861.762	172411.795
19	2873.533	28735.295	201147.090
20	3024.771	31760.066	232907.156

	A_m	SA_m	S^2A_m
21	3176°009	34936°075	267843°231
22	3327.239	38263.314	306106.545
23	3478.479	41741.793	347848.338
24	3629.711	45371.504	393219.842
25	3780.942	49152.446	442372.288
26	3932.174	53084.620	495456.908
27	4083.422	57168.042	552624.950
28	4234.663	61402.705	614027.655
29	4385.902	65788.607	679816.262
30	4537.141	70325.748	750142.010
31	4688.380	75014.128	825156.138
32	4839.619	79853.747	905009.885
33	4990.860	84844.607	989854.492
34	5142.108	89986.715	1079841.207
35	5293.354	95280.069	1175121.276
36	5444.607	100724.676	1275845.952
37	5595.845	106320.521	1382166.473
38	5747.090	112067.611	1494234.084
39	5898.333	117965.944	1612200.028
40	6049.573	124015.517	1736215.545

bBC = 124°38′06″452.
(1) — 0″986.
(2) — 0″625.
(3) + 22″525.
124°38′27″466.

48. 200° — ABC.

B = — 12451.″9, A = + 1196″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	171°679	171°679	171°679
2	343.355	515.034	686.713
3	515.042	1030.076	1716.789
4	686.732	1716.808	3433.597
5	858.411	2575.219	6008.816
8	1030.095	3605.314	9614.130
7	1201.773	4807.087	14421.217
8	1373.458	6180.545	20601.762
9	1545.139	7725.684	28327.446
10	1716.816	9442.500	37769.946
11	1888.501	11331.001	49100.947
12	2060.177	13391.178	62492.125
13	2231.857	15623.035	78115.160
14	2403.526	18026.561	96141.721
15	2575.206	20601.767	116743.488
16	2746.885	23348.652	140092.140
17	2918.560	26267.212	166359.352
18	3090.250	29357.462	195716.814

	A_m	SA_m	S^2A_m
19	3261°934	32619°396	228336°210
20	3433.612	36053.008	264389.218
21	3605.293	39658.301	304047.519
22	3776.972	43435.273	347482.792
23	3948.652	47383.925	394866.717
24	4120.342	51504.267	446370.984
25	4292.032	55796.299	502167.283
26	4463.713	60260.012	562427.295
27	4635.397	64895.409	627322.704
28	4807.074	69702.483	697025.187
29	4978.754	74681.237	771706.424
30	5150.430	79831.667	851538.091
31	5322.104	85153.771	936691.862
32	5493.782	90647.553	1027339.415
33	5665.465	96313.018	1123652.433

ABC = 114°15′96″063.
(1) — 0″966.
(2) — 0″559.
(3) + 1′92″888.
114°17′87″426.

49. 200° — AbB.

A = + 53953″5, B = + 234″6.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	228°879	228°879	228°879
2	457.751	686.630	915.509
3	686.627	1373.257	2288.766
4	915.503	2288.760	4577.526
5	1144.381	3433.141	8010.667
6	1373.255	4806.396	12817.063
7	1602.136	6408.532	19225.595
8	1831.018	8239.550	27465.145
9	2059.895	10299.445	37764.590
10	2288.769	12588.214	50352.804
11	2517.645	15105.859	65458.663
12	2746.523	17852.382	83311.045
13	2975.398	20827.780	104138.825
14	3204.270	24032.050	128170.875
15	3433.150	27465.200	155636.075

AbB = 85°56′15″573.
(1) + 4″407.
(2) + 1″345.
(3) — 5′08″788.
85°51′12″537.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	228°875	228°875	228°875
2	457.755	686.630	915.505
3	686.628	1373.258	2288.763
4	915.504	2288.762	4577.525
5	1144.374	3433.136	8010.661
6	1373.249	4806.385	12817.046
7	1602.126	6408.511	19225.557
8	1831.001	8239.512	27465.069
9	2059.879	10299.391	37764.460
10	2288.756	12588.147	50352.607
11	2517.632	15105.779	65458.386
12	2746.506	17852.285	83310.671
13	2975.382	20827.667	104138.338
14	3204.258	24031.925	128170.263
15	3433.130	27465.055	155635.318
16	3662.006	31127.061	186762.379
17	3890.876	35017.937	221780.316
18	4119.750	39137.687	260918.003
19	4348.624	43486.311	304404.314
20	4577.498	48063.809	352468.123
21	4806.373	52870.182	405338.305
22	5035.246	57905.428	463243.733

AbB = 85°56′25″422.
(1) + 4″407.
(3) — 5′16″414.
85°51′13″415 donc le milieu = 85°51′12″976.

50. BAn.

B = — 8399″4, n = — 3570″1.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	72°954	72°954	72°954
2	145.902	218.856	291.810
3	218.849	437.705	729.515
4	291.801	729.506	1459.021
5	364.744	1094.250	2553.271
6	437.698	1531.948	4085.219
7	510.643	2042.591	6127.810
8	583.591	2626.182	8753.992
9	656.547	3282.729	12036.721
10	729.496	4012.225	16048.946
11	802.446	4814.671	20863.617
12	875.396	5690.067	26553.684
13	948.347	6638.414	33192.098
14	1021.301	7659.715	40851.813
15	1094.249	8753.964	49605.777
16	1167.197	9921.161	59526.938
17	1240.146	11161.307	70688.245
18	1313.093	12474.400	83162.645
19	1386.041	13860.441	97023.086
20	1458.996	15319.437	112342.523

	A_m	SA_m	S^2A_m
21	1531°936	16851°373	129193°896
22	1604.889	18456.262	147650.158
23	1677.839	20134.101	167784.259
24	1750.789	21884.890	189669.149
25	1823.744	23708.634	213377.783
26	1896.692	25605.326	238983.109
27	1969.638	27574.964	266558.073
28	2042.591	29617.555	296175.628
29	2115.539	31733.094	327908.722
30	2188.485	33921.579	361830.301
31	2261.439	36183.018	398013.319
32	2334.383	38517.401	436530.720
33	2407.332	40924.733	477455.453
34	2480.285	43405.018	520860.471
35	2553.232	45958.250	566818.721
36	2626.183	48584.433	615403.154
37	2699.134	51283.567	666686.721
38	2772.081	54055.648	720742.369
39	2845.033	56900.681	777643.050
40	2917.982	59818.663	837461.713

BAn = 36°47′47″573.
(1) + 0″491.
(3) — 14″529.
36°47′33″535.

51. CAb.

b = — 51735″9, C = — 2439″8.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	258°519	258°519	258°519
2	517.029	775.548	1034.067
3	775.539	1551.087	2585.154
4	1034.052	2585.139	5170.293
5	1292.566	3877.705	9047.998
6	1551.072	5428.777	14476.775
7	1809.585	7238.362	21715.137
8	2068.094	9306.456	31021.593
9	2326.602	11633.058	42654.651
10	2585.113	14218.171	56872.822
11	2843.630	17061.801	73934.623
12	3102.135	20163.936	94098.559
13	3360.640	23524.576	117623.135
14	3619.152	27143.728	144766.863
15	3877.662	31021.390	175788.253
16	4136.160	35157.550	210945.803
17	4394.666	39552.216	250498.019
18	4653.180	44205.396	294703.415
19	4911.690	49117.086	343820.501
20	5170.203	54287.289	398107.790
21	5428.718	59716.007	457823.797

	A_m	SA_m	S^2A_m
22	5687°230	65403°237	523227°034
23	5945.746	71348.983	594576.017
24	6204.257	77553.240	672129.257
25	6462.765	84016.005	756145.262
26	6721.277	90737.282	846882.544
27	6979.790	97717.072	944599.616
28	7238.308	104955.380	1049554.996
29	7496.823	112452.203	1162007.199
30	7755.333	120207.536	1282214.735

CAb = 129°25′51″954.
(1) + 4″527.
(3) + 12′67″866.
129°38′24″347.

52. nAb.

b = — 51745″9, n = — 3608″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	281°125	281°125	281°125
2	562.257	843.382	1124.507
3	843.383	1686.765	2811.272
4	1124.518	2811.283	5622.555
5	1405.650	4216.933	9839.488
6	1686.772	5903.705	15743.193
7	1967.908	7871.613	23614.806
8	2249.036	10120.649	33735.455
9	2530.163	12650.812	46386.267
10	2811.297	15462.109	61848.376
11	3092.425	18554.534	80402.910
12	3373.554	21928.088	102330.998
13	3654.639	25582.777	127913.775
14	3935.822	29518.599	157432.374
15	4216.954	33735.553	191167.927
16	4498.087	38233.640	229401.567
17	4779.226	43012.866	272414.433
18	5060.348	48073.214	320487.647
19	5341.479	53414.693	373902.340
20	5622.607	59037.300	432939.640

nAb = 140°56′53″695.
(1) + 4″878.
(3) + 19′36″422.
140°75′94″995.

53. PAH.

$H = - 1209''6, \ P = + 977''2.$

	Am	SA_m	S^2A_m
1	119°473	119°473	119°473
2	238.951	358.424	477.897
3	358.420	716.844	1194.741
4	477.895	1194.739	2389.480
5	597.361	1792.100	4181.580
6	716.837	2508.937	6690.517
7	836.314	3345.251	10035.768
8	955.786	4301.037	14336.805
9	1075.260	5376.297	19713.102
10	1194.734	6571.031	26284.133
11	1314.210	7885.241	34169.374
12	1433.680	9318.921	43488.295
13	1553.146	10872.067	54360.362
14	1672.617	12544.684	66905.046
15	1792.088	14336.772	81241.818
16	1911.561	16248.333	97490.151
17	2031.034	18279.367	115769.518
18	2150.506	20429.873	136199.391
19	2269.979	22699.852	158899.243
20	2389.447	25089.299	183988.542
21	2508.916	27598.215	211586.757
22	2628.395	30226.610	241813.367
23	2747.867	32974.477	274787.844
24	2867.339	35841.816	310629.660
25	2986.816	38828.632	349458.292
26	3106.288	41934.920	391393.212
27	3225.764	45160.684	436553.896
28	3345.239	48505.923	485059.819
29	3464.721	51970.644	537030.463
30	3584.187	55554.831	592585.294
31	3703.660	59258.491	651843.785
32	3823.135	63081.626	714925.411
33	3942.610	67024.236	781949.647
34	4062.089	71086.325	853035.972

PAH = 59°73'63''916.
(1) + 0''399.
(3) − 3''694.
59°73'60''621.

54. PAb.

$P = + 1071''6,\ b = - 51684''9.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	172°200	172°200	172°200
2	344.391	516.591	688.791
3	516.583	1033.174	1721.965
4	688.773	1721.947	3443.912
5	860.965	2582.912	6026.824
6	1033.161	3616.073	9642.897
7	1205.358	4821.431	14464.328
8	1377.555	6198.986	20663.314
9	1549.757	7748.743	28412.057
10	1721.946	9470.689	37882.746
11	1894.148	11364.837	49247.583
12	2066.343	23431.180	62678.763
13	2238.541	15669.721	78348.484
14	2410.735	18080.456	96428.940
15	2582.933	20663.389	117092.329
16	2755.129	23418.518	140510.847
17	2927.321	26345.839	166856.686
18	3099.520	29445.359	196302.045
19	3271.718	32717.077	229019.122
20	3443.912	36160.989	265180.111
21	3616.107	39777.096	304957.207
22	3788.303	43565.399	348522.606
23	3960.495	47525.894	396048.500
24	4132.688	51658.582	447707.082
25	4304.885	55963.467	503670.549
26	4477.076	60440.543	564111.092
27	4649.275	65089.818	629200.910
28	4821.475	69911.293	699112.203
29	4993.665	74904.958	774017.161
30	5165.857	80070.815	854087.976

PAb = 86°09′78″040.
(1) — 4″810.
(3) — 5′56″443.
86°04′16″787.

55. AHC.

$A = + 431'2,\ C = - 1793''5.$

	A_m	AS_m	S^2A_m
1	81°561	81°561	81°561
2	163.122	244.683	326.244
3	244.688	489.371	815.615
4	326.245	815.616	1631.231
5	407.808	1223.424	2854.655
6	489.369	1712.793	4567.448
7	570.932	2283.725	6851.173

	A_m	SA_m	S^2A_m
8	652°496	2936°221	9787°394
9	734.054	3670.275	13457.669
10	815.616	4485.891	17943.560
11	897.178	5383.069	23326.629
12	978.736	6361.805	29688.434
13	1060.296	7422.101	37110.535
14	1141.857	8563.958	45674.493
15	1223.423	9787.381	55461.874
16	1304.982	11092.363	66554.237
17	1386.543	12478.906	79033.143
18	1468.105	13947.011	92980.154
19	1549.666	15496.677	108476.831
20	1631.229	17127.906	125604.737

AHC = 40°78′06″640.
(1) + 0″371.
(3) — 5″617.
40°78′01″394.

56. AHn.

$A = + 364''5$, $n = - 3232''7$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	125°215	125°215	125°215
2	250.429	375.644	500.859
3	375.645	751.289	1252.148
4	500.856	1252.145	2504.293
5	626.076	1878.221	4382.514
6	751.294	2629.515	7012.029
7	876.508	3506.023	10518.052
8	1001.719	4507.742	15025.794
9	1126.937	5634.679	20660.473
10	1252.160	6886.839	27547.312
11	1377.374	8264.213	35811.525
12	1502.597	9766.810	45578.335
13	1627.810	11394.620	56972.955
14	1753.025	13147.645	70120.600
15	1878.243	15025.888	85146.488
16	2003.457	17029.345	102175.833
17	2128.670	19158.015	121333.848
18	2253.884	21411.899	142745.747
19	2379.095	23790.994	166536.741
20	2504.310	26295.304	192832.045
21	2629.526	28924.830	221756.875
22	2754.745	31679.575	253436.450
23	2879.961	34559.536	287995.986
24	3005.176	37564.712	325560.698
25	3130.386	40695.098	366255.796

L

AHn = 62°60′78″781.
(1) + 0″541.
(3) — 3″366.
62°60′75″956.

57. AHP.

A = + 387″0, P = + 2264″8.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	210°900	210°900	210°900
2	421.810	632.710	843.610
3	632.715	1265.425	2109.035
4	843.620	2109.045	4218.080
5	1054.521	3163.566	7381.646
6	1265.423	4428.989	11810.635
7	1476.331	5905.320	17715.955
8	1687.230	7592.550	25308.505
9	1898.132	9490.682	34799.187
10	2109.040	11599.722	46398.909
11	2319.942	13919.664	60318.573
12	2530.849	16450.513	76769.086
13	2741.750	19192.263	95961.349
14	2952.655	22144.918	118106.267
15	3163.557	25308.475	143414.742
16	3374.458	28682.933	172097.675
17	3585.363	32268.296	204365.971
18	3796.270	36064.566	240430.537
19	4007.179	40071.745	280502.282
20	4218.084	44289.829	324792.111
21	4428.994	48718.823	373510.934
22	4639.896	53358.719	426869.653
23	4850.796	58209.515	485079.168
24	5061.701	63271.216	548350.384
25	5272.605	68543.821	616894.205

AHP = 105°45′20″929.
(1) — 0″296.
(3) + 1″739 . . . 105°45″22″372.

58. CHK.

C = — 1703″1, K = — 1972″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	80°172	80°172	80°172
2	160.343	240.515	320.687
3	240.516	481.031	801.718
4	320.685	801.716	1603.434
5	400.857	1202.573	2806.007

	A_m	SA_m	S^2A_m
6	481°029	1683°602	4489°609
7	561.202	2244.804	6734.413
8	641.380	2886.184	9620.597
9	721.550	3607.734	13228.331
10	801.721	4409.455	17637.786
11	881.892	5291.347	22929.133
12	962.066	6253.413	29182.546
13	1042.240	7295.653	36478.199
14	1122.412	8418.065	44896.264
15	1202.581	9620.646	54516.910
16	1282.754	10903.400	65420.310
17	1362.930	12266.330	77686.640
18	1443.105	13709.435	91396.075
19	1523.271	15232.706	106628.781
20	1603.451	16836.157	123464.938
21	1683.625	18519.782	141984.720
22	1763.798	20283.580	162268.300
23	1843.976	22127.556	184395.856
24	1924.147	24051.703	208447.559
25	2004.323	26056.026	234503.585
26	2084.499	28140.525	262644.110
27	2164.669	30305.194	292949.304
28	2244.846	32550.040	325499.344
29	2325.019	34875.059	360374.403
30	2405.198	37280.257	397654.660

CHK = 40°08′65″825.
(1) + 0″138.
(3) + 1″640.
40°08′67″603.

59. PHN.

P = + 2260″8, N = − 594″8.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	109°273	109°273	109°273
2	218.549	327.822	437.095
3	327.828	655.650	1092.745
4	437.108	1092.758	2185.503
5	546.379	1639.137	3824.640
6	655.658	2294.795	6119.435
7	764.928	3059.723	9179.158
8	874.207	3933.930	13113.088
9	983.481	4917.411	18030.499
10	1092.757	6010.168	24040.667
1	109.280	109.280	109.280
2	218.555	327.835	437.115
3	327.838	655.673	1092.788
4	437.103	1092.776	2185.564
5	546.383	1639.159	3824.723
6	655.658	2294.817	6119.540

	A_m	SA_m	S^2A_m
7	764°935	3059°752	9179°292
8	874.211	3933.963	13113.255
9	983.488	4917.451	18030.706
10	1092.766	6010.217	24040.923
11	1202.040	7212.257	31253.180
12	1311.315	8523.572	39776.752

PHN = 54°63′79″867.
(1) + 0″346.
(3) — 6″499.
54°63′73″714.

60. APH.

A = — 3185″5, H = — 4014″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	69°623	69°623	69°623
2	139.248	208.871	278.494
3	208.869	417.740	696.234
4	278.498	696.238	1392.472
5	348.112	1044.350	2436.822
6	417.739	1462.089	3898.911
7	487.360	1949.449	5848.360
8	556.981	2506.430	8354.790
9	626.605	3133.035	11487.825
10	696.225	3829.260	15317.085
11	765.849	4595.109	19912.194
12	835.479	5430.588	25342.782
13	905.097	6335.685	31678.467
14	974.718	7310.403	38988.870
15	1044.341	8354.744	47343.614
16	1113.958	9468.702	56812.316
17	1183.584	10652.286	67464.602
18	1253.210	11905.496	79370.098
19	1322.825	13228.321	92598.419
20	1392.448	14620.769	107219.188

APH = 34°81′12″151.
(1) — 0″103.
(3) + 4″747.
34°81′16″795.

61. NPQ.

N = — 4813″0, Q = — 5875″3.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	195°210	195°210	195°210
2	390.416	585.626	780.836
3	585.623	1171.249	1952.085
4	780.836	1952.085	3904.170
5	976.044	2928.129	6832.299
6	1171.252	4099.381	10931.680
7	1366.456	5465.837	16397.517
8	1561.662	7027.499	23425.016
9	1756.868	8784.367	32209.383
10	1952.082	10736.449	42945.832
11	2147.290	12883.739	55829.571
12	2342.503	15226.242	71055.813
13	2537.716	17763.958	88819.771
14	2732.928	20496.886	109316.657
15	2928.132	23425.018	132741.675
16	3123.335	26548.353	159290.028
17	3318.541	29866.894	189156.922
18	3513.748	33380.642	222537.564
19	3708.954	37089.596	259627.160
20	3904.165	40993.761	300620.921

NPQ = 97°60′42″007.
(1) + 0″127.
(3) + 42″746.
97°60′84″880.

62. NPt.

N = — 4838″7, t = — 3651″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	212°519	212°519	212°519
2	425.040	637.559	850.078
3	637.558	1275.117	2125.195
4	850.085	2125.202	4250.397
5	1062.609	3187.811	7438.208
6	1275.130	4462.941	11901.149
7	1487.656	5950.597	17851.746
8	1700.175	7650.772	25502.518
9	1912.691	9563.463	35065.981
10	2125.216	11688.679	46754.660
11	2337.734	14026.413	60781.073
12	2550.254	16576.667	77357.740
13	2762.773	19339.440	96697.180
14	2975.296	22314.736	119011.916
15	3187.814	25502.550	144514.466

	A_m	SA_m	S^2A_m
16	3400°337	28902°887	173417°353
17	3612.860	32515.747	205933.100
18	3825.379	36341.126	242274.226
19	4037.908	40379.034	282653.260
20	4250.429	44629.463	327282.723

NPt = 106°26′06″165.
(1) + 0″282.
(3) + 30′741.
106°26′37″188.

63. NPa.

N = — 4802″8, a = — 3413″0.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	266°804	266°804	266°804
2	533.600	800.404	1067.208
3	800.400	1600.804	2668.012
4	1067.204	2668.008	5336.020
5	1334.000	4002.008	9338.028
6	1600.804	5602.812	14940.840
7	1867.607	7470.419	22411.259
8	2134.403	9604.822	32016.081
9	2401.202	12006.024	44022.105
10	2668.008	14674.032	58696.137
11	2934.805	17608.837	76304.974
12	3201.608	20810.445	97115.419
13	3468.413	24278.858	121394.277
14	3735.211	28014.069	149408.346
15	4002.015	32016.084	181424.430
16	4268.820	36284.904	217709.334
17	4535.622	40820.526	258529.860
18	4802.428	45622.954	304152.814
19	5069.234	50692.188	354845.002
20	5336.036	56028.224	410873.226
21	5602.845	61631.069	472504.295
22	5869.653	67500.722	540005.017
23	6136.455	73637.177	613642.194
24	6403.264	80040.441	693682.635
25	6670.072	86710.513	780393.148
26	6936.875	93647.388	874040.536
27	7203.682	100851.070	974891.606
28	7470.490	108321.560	1083213.166
29	7737.295	116058.855	1199272.021
30	8004.099	124062.954	1323334.975
1	266.804	266.804	266.804
2	533.604	800.408	1067.212
3	800.406	1600.814	2668.026
4	1067.211	2668.025	5336.051
5	1334.013	4002.038	9338.089
6	1600.821	5602.859	14940.948
7	1867.624	7470.483	22411.431

	A_m	SA_m	S^2A_m
8	2134°425	9604°908	32016°339
9	2401.228	12006.136	44022.475
10	2668.034	14674.170	58696.645
11	2934.830	17609.000	76305.645
12	3201.639	20810.639	97116.284
13	3468.445	24279.084	121395.368
14	3735.246	28014.330	149409.698
15	4002.052	32016.382	181426.080
16	4268.854	36285.236	217711.316
17	4535.652	40820.888	258532.204
18	4802.454	45623.342	304155.546
19	5069.259	50692.601	354848.147
20	5336.059	56028.660	410876.807
21	5602.861	61631.521	472508.328

NPa = 133°40′16″292.
(1) — 0″057.
(3) + 45″531.
133°40′61″766.

64. NPH.

N = — 4838″9, H = — 3938″0.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	83°095	83°095	83°095
2	166.190	249.285	332.380
3	249.289	498.574	830.954
4	332.374	830.948	1661.902
5	415.470	1246.418	2908.320
6	498.564	1744.982	4653.302
7	581.659	2326.641	6979.943
8	664.760	2991.401	9971.344
9	747.853	3739.254	13710.598
10	830.953	4570.207	18280.805
11	914.047	5484.254	23765.059
12	997.145	6481.399	30246.458
13	1080.245	7561.644	37808.102
14	1163.339	8724.983	46533.085
15	1246.437	9971.420	56504.505
16	1329.526	11300.946	67805.451
17	1412.626	12713.572	80519.023
18	1495.730	14209.302	94728.325
19	1578.828	15788.130	110516.455
20	1661.924	17450.054	127966.509
21	1745.021	19195.075	147161.584
22	1828.118	21023.193	168184.777
23	1911.211	22934.404	191119.181
24	1994.311	24928.715	216047.896
25	2077.409	27006.124	243054.020

NPH = 41°54′82″659.
(1) — 0″171.
(3) + 9″296.
41°54′91″784.

65. 200° — HNa.

H = — 158″0, a = — 140″1.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	128°578	128°578	128°578
2	257.163	385.741	514.319
3	385.741	771.482	1285.801
4	514.324	1285.806	2571.607
5	642.909	1928.715	4500.322
6	771.489	2700.204	7200.526
7	900.070	3600.274	10800.800
8	1028.660	4628.934	15429.734
9	1157.243	5786.177	21215.911
10	1285.831	7072.008	28287.919
11	1414.417	8486.425	36774.344
12	1542.998	10029.423	46803.767
13	1671.584	11701.007	58504.774
14	1800.167	13501.174	72005.948
15	1928.754	15429.928	87435.876
16	2057.339	17487.267	104923.143
17	2185.924	19673.191	124596.334
18	2314.505	21987.696	146584.030
19	2443.091	24430.787	171014.817
20	2571.670	27002.457	198017.274
21	2700.261	29702.718	227719.992
22	2828.844	32531.562	260251.554
23	2957.430	35488.992	295740.546
24	3086.015	38575.007	334315.553

HNa = 135°70′78″618.
(1) + 0″459.
(3) + 0″063.
135°70′79″140.

66. HNP.

P = + 3718″2, H = — 144″1.

	A_m	AS_m	S^2A_m
1	207°622	207°622	207°622
2	415.255	622.877	830.499
3	622.890	1245.767	2076.266
4	830.518	2076.285	4152.551

	A_m	SA_m	S^2A_m
5	1038°150	3114°435	7266°986
6	1245.774	4360.209	11627.195
7	1453.406	5813.615	17440.810
8	1661.042	7474.657	24915.467
9	1868.678	9343.335	34258.802
10	2076.311	11419.646	45678.448
11	2283.944	13703.590	59382.038
12	2491.575	16195.165	75577.203
13	2699.204	18894.369	94471.572
14	2906.841	21801.210	116272.782
15	3114.479	24915.689	141188.471
16	3322.121	28237.810	169426.281
17	3529.750	31767.560	201193.841
18	3737.380	35504.940	236698.781
19	3945.011	39449.951	276148.732
20	4152.642	43602.593	319751.325
21	4360.276	47962.869	367714.194
22	4567.899	52530.768	420244.962

HNP = 103°81'63"528.
(1) — 0"175.
(3) — 0"191.
103°81'63"162.

67. HNK.

H = — 117"9, K = — 2318"5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	60°380	60°380	60°380
2	120.758	181.138	241.518
3	181.136	362.274	603.792
4	241.516	603.790	1207.582
5	301.895	905.685	2113.267
6	362.273	1267.958	3381.225
7	422.652	1690.610	5071.835
8	483.020	2173.630	7245.465
9	543.399	2717.029	9962.494
10	603.779	3320.808	13283.302
11	664.158	3984.966	17268.268
12	724.526	4709.492	21977.760
13	784.909	5494.401	27472.161
14	845.296	6339.697	33811.858
15	905.669	7245.366	41057.224

HNK = 30°18'87"800.
(1) + 0"638.
(3) — 7"306.
30°18'81"132.

68. PNQ.

$P = + 3850''9$, $Q = - 2238''6$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	115°384	115°384	115°384
2	230.764	346.148	461.532
3	346.140	692.288	1153.820
4	461.523	1153.811	2307.631
5	576.905	1730.716	4038.347
6	692.286	2423.002	6461.349
7	807.670	3230.672	9692.021
8	923.044	4153.716	13845.737
9	1038.422	5192.138	19037.875
10	1153.806	6345.944	25383.819
11	1269.182	7615.126	32998.945
12	1384.560	8999.686	41998.631
13	1499.944	10499.630	52498.261
14	1615.323	12114.953	64613.214
15	1730.701	13845.654	78458.868
16	1846.083	15691.737	94150.605
17	1961.460	17653.197	111803.802
18	2076.840	19730.037	131533.839
19	2192.215	21922.252	153456.091
20	2307.596	24229.848	177685.939

$PNQ = 57°68'98''634.$
(1) $- 0''251.$
(3) $- 29''413.$
$57°68'68''970.$

69. PQN.

$P = + 4472''2$, $N = + 517''6$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	89°415	89°415	89°415
2	178.825	268.240	357.655
3	268.241	536.481	894.136
4	357.647	894.128	1788.264
5	447.061	1341.189	3129.453
6	536.470	1877.659	5007.112
7	625.878	2503.537	7510.649
8	715.289	3218.826	10729.475
9	804.706	4023.532	14753.007
10	894.116	4917.648	19670.655
11	983.526	5901.174	25571.829
12	1072.943	6974.117	32545.946
13	1162.357	8136.474	40682.420
14	1251.771	9388.245	50070.665
15	1341.176	10729.421	60800.086
16	1430.591	12160.012	72960.098
17	1520.000	13680.012	86640.110

	A_m	SA_m	S^2A_m
18	1609°414	15289°426	101929°536
19	1698.831	16988.257	118917.793
20	1788.241	18776.498	137694.291

PQN = 44°70′59″651.
(1) + 0″124.
(3) − 13″185.
44°70′46″590.

70. PQa.

a = + 5322″2, P = + 4445″1.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	108°049	108°049	108°049
2	216.092	324.141	432.190
3	324.136	648.277	1080.467
4	432.182	1080.459	2160.926
5	540.221	1620.680	3781.606
6	648.272	2268.952	6050.558
7	756.318	3025.270	9075.828
8	864.363	3889.633	12965.461
9	972.411	4862.044	17827.505
10	1080.465	5942.509	23770.014
11	1188.510	7131.019	30901.033
12	1296.558	8427.577	39328.610
13	1404.610	9832.187	49160.797
14	1512.660	11344.847	60505.644
15	1620.714	12965.561	73471.205
16	1728.762	14694.323	88165.528
17	1836.812	16531.135	104696.663
18	1944.854	18475.989	123172.652
19	2052.900	20528.889	143701.541
20	2160.942	22689.831	166391.372
21	2268.989	24958.820	191350.192
22	2377.033	27335.853	218686.045
23	2485.077	29820.930	248506.975
24	2593.120	32414.050	280921.025
25	2701.164	35115.214	316036.239
26	2809.207	37924.421	353960.660
27	2917.251	40841.672	394802.332
28	3025.302	43866.974	438669.306
29	3133.349	47000.323	485669.629
30	3241.399	50241.722	535911.351
31	3349.443	53591.165	589502.516
32	3457.496	57048.661	646551.177
33	3565.535	60614.196	707165.373
34	3673.576	64287.772	771453.145
35	3781.619	68069.391	839522.536
1	108.041	108.041	108.041
2	216.084	324.125	432.166

	A_m	SA_m	S^2A_m
3	324°128	648°253	1080°419
4	432.179	1080.432	2160.851
5	540.223	1620.655	3781.506
6	648.275	2268.930	6050.436
7	756.325	3025.255	9075.691
8	864.371	3889.626	12965.317
9	972.417	4862.043	17827.360
10	1080.461	5942.504	23769.864

PQa = 54°02′33″624.
(1) + 0″497.
(3) + 16″270.
54°02′50″391.

71. tQa.

a = + 5410″5, t = + 4252″5.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	230°024	230°024	230°024
2	460.051	690.075	920.099
3	690.074	1380.149	2300.248
4	920.096	2300.245	2600.493
5	1150.123	3450.368	8050.861
6	1380.144	4830.512	12881.373
7	1610.168	6440.680	19322.053
8	1840.192	8280.872	27602.925
9	2070.219	10351.091	37954.016
10	2300.243	12651.334	50605.350
11	2530.265	15181.599	65786.949
12	2760.294	17941.893	83728.842
13	2990.319	20932.212	104661.054
14	3220.346	24152.558	128813.612
15	3450.369	27602.927	156416.539
16	3680.393	31283.320	187699.859
17	3910.410	35193.730	222893.589
18	4140.433	39334.163	262227.752
19	4370.457	43704.620	305932.372
20	4600.478	48305.098	354237.470
21	4830.507	53135.605	407373.075

tQa = 115°01′20″822.
(1) + 0″397.
(3) + 46″109.
115°01′67″328.

72. Pta.

$P = + 1453''4$, $a = + 1321''0$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	55°888	55°888	55°888
2	111.780	167.668	223.556
3	167.676	335.344	558.900
4	223.565	558.909	1117.809
5	279.460	838.369	1956.178
6	335.348	1173.717	3129.895
7	391.241	1564.958	4694.853
8	447.132	2012.090	6706.943
9	503.020	2515.110	9222.053
10	558.910	3074.020	12296.073
11	614.803	3688.823	15984.896
12	670.695	4359.518	20344.414
13	726.583	5086.101	25430.515
14	782.475	5868.576	31299.091
15	838.370	6706.946	38006.037
16	894.261	7601.207	45607.244
17	950.156	8551.363	54158.607
18	1006.049	9557.412	63716.019
19	1061.942	10619.354	74335.373
20	1117.830	11737.184	86072.557
21	1173.723	12910.907	98983.464
22	1229.620	14140.527	113123.991
23	1285.509	15426.036	128550.027
24	1341.398	16767.434	145317.461
25	1397.295	18164.729	163482.190
26	1453.194	19617.923	183100.113
27	1509.075	21126.998	204227.111
28	1564.962	22691.960	226919.071
29	1620.853	24312.813	251231.884
30	1676.742	25989.555	277221.439

Pta $= 27°94'58''607.$
(1) $+ 0''360.$
(3) $+ 0''644.$
$27°94'59''611.$

73. Qta.

$a = + 1346''9$, $Q = - 4225''8$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	100°513	100°513	100°513
2	201.024	301.537	402.050
3	301.540	603.077	1005.127
4	402.046	1005.123	2010.250
5	502.554	1507.677	3517.927
6	603.063	2110.740	5628.667

	A_m	SA_m	S^2A_m
7	703°573	2814°313	8442°980
8	804.078	3618.391	12061.371
9	904.586	4522.977	16584.348
10	1005.097	5528.074	22112.422
11	1105.608	6633.682	28746.104
12	1206.113	7839.795	36585.899
13	1306.621	9146.416	45732.315
14	1407.132	10553.548	56285.863
15	1507.638	12061.186	68347.849
16	1608.146	13669.332	82016.381
17	1708.651	15377.983	97394.364
18	1809.159	17187.142	114581.506
19	1909.662	19096.804	133678.310
20	2010.170	21106.974	154785.284
21	2110.678	23217.652	178002.936
22	2211.189	25428.841	203431.777
23	2311.696	27740.537	231172.314
24	2412.202	30152.739	261325.053
25	2512.706	32665.445	293990.498
26	2613.211	35278.656	329269.154
27	2713.714	37992.370	367261.524
28	2814.224	40806.594	408068.118
29	2914.725	43721.319	451789.437
30	3015.236	46736.555	498525.992
31	3115.741	49852.296	548378.288
32	3216.245	53068.541	601446.829
33	3316.751	56385.292	657832.121
34	3417.260	59802.552	717634.673
35	3517.766	63320.318	780954.991

Qta = 50°25′36″505.
(1) — 0″689.
(3) — 27″902.
50°25′07″914.

74. Ptπ.

P = + 1457″4, π = — 779″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	271°585	271°585	271°585
2	543.167	814.752	1086.337
3	814.759	1629.511	2715.848
4	1086.342	2715.853	5431.701
5	1357.927	4073.780	9505.481
6	1629.513	5703.293	15208.774
7	1901.096	7604.389	22813.163
8	2172.680	9777.069	32590.232
9	2444.269	12221.338	44811.570
10	2715.851	14937.189	59748.759
11	2987.437	17924.626	77673.385
12	3259.025	21183.651	98857.036
13	3530.604	24714.255	123571.291

	A_m	SA_m	S^2A_m
14	3802°190	28516°445	152087°736
15	4073.775	32590.220	184677.956
16	4345.365	36935.585	221613.541
17	4616.953	41552.538	263166.079
18	4888.537	46441.075	309607.154
19	5160.124	51601.199	361208.353
20	5431.706	57032.905	418241.258

Ptπ = 135°79′26″540.
(1) — 0″100.
(3) — 0″758.
135°79′25″682.

75. PaN.

P = + 2270″1, N = — 1900″9.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	69°408	69°408	69°408
2	138.817	208.225	277.633
3	208.225	416.450	694.083
4	277.638	694.088	1388.171
5	347.038	1041.126	2429.297
6	416.449	1457.575	3886.872
7	485.853	1943.428	5830.300
8	555.261	2498.689	8328.989
9	624.670	3123.359	11452.348
10	694.080	3817.439	15269.787
11	763.493	4580.932	19850.719
12	832.904	5413.836	25264.555
13	902.311	6316.147	31580.702
14	971.721	7287.868	38868.570
15	1041.129	8328.997	47197.567
16	1110.533	9439.530	56637.097
17	1179.949	10619.479	67256.576
18	1249.360	11868.839	79125.415
19	1318.766	13187.605	92313.020
20	1388.175	14575.780	106888.800

PaN = 34°70′44″029.
(1) + 0″341.
(3) — 26″807.
34°70′17″563.

76. PaQ.

$P = + 2421''6, \; Q = - 5696''0.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	220°362	220°362	220°362
2	440.728	661.090	881.452
3	661.089	1322.179	2203.631
4	881.449	2203.628	4407.259
5	1101.817	3305.445	7712.704
6	1322.174	4627.619	12340.323
7	1542.537	6170.156	18510.479
8	1762.898	7933.054	26443.533
9	1983.261	9916.315	36359.848
10	2203.622	12119.937	48479.785
11	2423.989	14543.926	63023.711
12	2644.348	17188.274	80211.985
13	2864.704	20052.978	100264.963
14	3085.065	23138.043	123403.006
15	3305.429	26443.472	149846.478
16	3525.789	29969.261	179815.739
17	3746.150	33715.411	213531.150
18	3966.514	37681.925	251213.075
19	4186.873	41868.798	293081.873
20	4407.243	46276.041	339357.914

PaQ = 110°18′08″588.
(1) — 0″313.
(3) — 17″094.
110°17′91″181.

77. Qaπ.

$Q = - 5661''7, \; \pi = - 1780''6.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	206°081	206°081	206°081
2	412.173	618.254	824.335
3	618.260	1236.514	2060.849
4	824.342	2060.856	4121.705
5	1030.427	3091.283	7212.988
6	1236.515	4327.798	11540.786
7	1442.599	5770.397	17311.183
8	1648.681	7419.078	24730.261
9	1854.766	9273.844	34004.105
10	2060.850	11334.694	45338.799
11	2266.939	13601.633	58940.432
12	2473.020	16074.653	75015.085
13	2679.109	18753.762	93768.847
14	2885.185	21638.947	115407.794
15	3091.266	24730.213	140138.007

	A_m	SA_m	S^2A_m
16	3297°353	28027°566	168165°573
17	3503.440	31531.006	199696.579
18	3709.523	35240.529	234937.108
19	3915.605	39156.134	274093.242
20	4121.689	43277.823	317371.065

Q a π = 103°04′21″941.
(1) + 0″789.
(3) + 17″177.
103°04′39″907.

78. π a t.

$t = -\ 2172''2,\ \pi = -\ 1771''3.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	136°623	136°623	136°623
2	273.252	409.875	546.498
3	409.867	819.742	1366.240
4	546.484	1366.226	2732.466
5	683.115	2049.341	4781.807
6	819.734	2869.075	7650.882
7	956.356	3825.431	11476.313
8	1092.979	4918.410	16394.723
9	1229.598	6148.008	22542.731
10	1366.214	7514.222	30056.953
11	1502.839	9017.061	39074.014
12	1639.456	10656.517	49730.531
13	1776.077	12432.594	62163.125
14	1912.700	14345.294	76508.419
15	2049.326	16394.620	92903.039
16	2185.950	18580.570	111483.609
17	2322.565	20903.135	132386.744
18	2459.186	23362.321	155749.065
19	2595.806	25958.127	181707.192
20	2732.440	28690.567	210397.759

π a t = 68°31′06″915.
(1) + 0″497.
(3) + 3″526.
68°31′10″938.

79. $a \pi t$.

$a = -1423''5, \; t = -2783''6.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	47°686	47°686	47°686
2	95.364	143.050	190.736
3	143.045	286.095	476.831
4	190.727	476.822	953.653
5	238.415	715.237	1668.890
6	286.097	1001.334	2670.224
7	333.769	1335.103	4005.327
8	381.454	1716.557	5721.884
9	429.142	2145.699	7867.583
10	476.821	2622.520	10490.103
11	524.500	3147.020	13637.123
12	572.182	3719.202	17356.325
13	619.865	4339.067	21695.392
14	667.552	5006.619	26702.011
15	715.229	5721.848	32423.859
16	762.918	6484.766	38908.625
17	810.590	7295.356	46203.981
18	858.282	8153.638	54357.619

$a \pi t = 23°84'10''153.$

(1) $- 0''037.$

(2) $- 3''495.$

(3) $+ 0''407.$

$23°84'07''028.$

80. GtP.

$G = -2082''8, \; P = +1540''0.$

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	238°620	238°620	238°620
2	477.244	715.864	954.484
3	715.869	1431.733	2386.217
4	954.500	2386.233	4772.450
5	1193.125	3579.358	8351.808

$GtP = 119°31'27''143.$

(1) $+ 0''527.$

(3) $- 3''629.$

$119°31'24''041.$

81. Gat.

$G = -3216''7$, $t = -2172''2$.

	A_m	SA_m	S^2A_m
1	94°741	94°741	94°741
2	189.472	284.213	378.954
3	284.208	568.421	947.375
4	378.941	947.362	1894.737
5	473.679	1421.041	3315.778

Gat = 47°36'75''857.
(1) + 0''135.
(3) + 3''352.
47°36'79''344.

Tableau de la valeur des cotés de nos triangles.

	Mètres.	Toises.	Piès de Svède
πt	36954.453	18960.371	124467.260
πa	41738.950	21415.170	140582.030
tQ	8211.483	4213.097	27657.302
ta	15384.937	7893.612	51818.405
tP	28321.520	14531.037	95390.462
Qa	11232.741	5763.228	37833.280
QP	20800.700	10672.298	70059.520
QN	26407.720	13549.116	88944.510
aP	15810.127	8111.765	53250.494
aN	28490.680	14617.827	95960.180
PN	17068.876	8757.597	57490.122
PH	22516.954	11552.860	75839.940
PA	27814.641	14270.970	93683.226
NH	13698.642	7028.417	46138.743
NK	48817.997	25047.243	164425.126
HA	14516.182	7447.876	48892.327
HC	26109.290	13396.134	87940.256
HK	37161.383	19066.538	125164.186
Hn	38662.974	19836.965	130221.754
Ab	2311.587	1186.015	7785.714

	Mètres.	Toises.	Piès de Svède
AB	14110.422	7239.690	47525.673
AC	16872.530	8656.857	56828.801
An	32917.004	16888.856	110866.038
bB	14451.125	7414.496	48673.200
BC	6645.069	3409.412	22381.426
CK	22232.180	11406.755	74880.780
Cn	16585.626	8509.641	55862.384
Cθ	49662.500	25480.537	167269.542
Kn	10937.969	5611.987	36840.451
Kθ	34719.263	17813.549	116938.821
Kk	38866.463	19941.373	130907.145
Kh	50162.240	25736.940	168952.720
nθ	33390.460	17131.778	112463.249
θk	16783.941	8611.403	56530.461
θf	10144.717	5204.991	34168.680
θh	16356.793	8392.245	55091.734
fh	11753.048	6030.182	39585.741
θE	28307.012	14523.590	95341.556
kh	17946.453	9207.859	60445.911
θF	25843.542	13259.643	87044.256
fF	16364.559	8396.231	55117.894
fE	18243.593	9360.335	61446.717
hF	23197.397	11901.980	78131.751
hE	18893.557	9693.790	63635.870
FE	10705.363	5492.642	36057.006
Fμ	17769.385	9117.008	59849.501
Eμ	19485.286	9997.394	65628.883
Ga	18577.696	9531.732	62572.019
Gt	12698.800	6515.423	42771.148
nT	31068.114	15940.240	104641.310
KT	32526.437	16688.469	109553.120
Tf	11999.839	6156.805	40416.962
Th	18676.136	9805.440	62903.561
TF	27171.127	13940.798	91515.990
θq	17890.131	9178.960	60256.204
hq	18086.526	9279.726	60917.691

III:me Section

Des Observations Astronomiques.

§. 25.

La partie Géodésique ayant été achevée comme nous venons de le voir, il nous restoit à déterminer la différence en latitude des points extrêmes π & μ; ensuite, observant l'azimuth d'un des points F voisins à μ, il en falloit calculer la distance des parallèles de π & μ, dont la valeur exprimée en Mêtres devoit déterminer celle du dégré du Méridien. Or pour en faire connoitre les détails, nous commencerons par l'exposition des formules de réductions, dont nous avons fait usage; et puisque nous nous sommes servi de la Polaire, dans nos observations des distances au zénith, nous en détaillerons les éléments avec la dernière exactitude. Ceux que nous avons adopté préalablement pour l'epôque du premier Janvier 1800 sont δ ou la déclinaison $= 98°04'49''074$, α ou l'ascension droite $= 14°54'16''667$, l ou la longitude $= 95°30'02''827$, λ ou la latitude $= 73°41'94''018$, π ou l'angle de position $= 81°15'44''408$, et ω ou l'obliquité de l'écliptique $= 26°07'34''568$. Enfin les équations suivantes auront généralement lieu pour toutes les étoiles: savoir *).

---

*) Nous les avons rassemblé ici, à cause de l'usage fréquent que nous en férons dans la suite, et ceux qui en pourroient désirer la démonstration, la trouveront, en résolvant le triangle sphérique que fait l'étoile avec les deux pôles de l'écliptique et de l'équateur.

(1) $\text{Tang.}\,\alpha = \text{Tang.}\,l.\ \text{Cosin.}\,\omega - \text{Tang.}\,\lambda.\ \text{Sec.}\,l.\ \text{Sin.}\,\omega.$

(2) $\text{Sin.}\,\delta = \text{Sin.}\,l.\ \text{Cosin.}\,\lambda.\ \text{Sin.}\,\omega + \text{Sin.}\,\lambda.\ \text{Cosin.}\,\omega.$

(3) $\text{Tang.}\,l = \text{Sin.}\,\omega.\ \text{Tang.}\,\delta.\ \text{Sec.}\,\alpha + \text{Tang.}\,\alpha.\ \text{Cosin.}\,\omega.$

(4) $\text{Sin.}\,\lambda = \text{Sin.}\,\delta.\ \text{Cosin.}\,\omega - \text{Sin.}\,\alpha.\ \text{Cosin.}\,\delta.\ \text{Sin.}\,\omega.$

(5) $\text{Cotang.}\,\pi = \text{Cosin.}\,\delta.\text{Sec.}\,\alpha.\text{Cotang.}\,\omega + \text{Sin.}\,\delta.\ \text{Tang.}\,\alpha.$

(6) $\text{Cotang.}\,\pi = \text{Cosin.}\,\lambda.\ \text{Sec.}\,l.\text{Cotang.}\,\omega - \text{Sin.}\,\lambda.\text{Tang.}\,l.$

(7) $\text{Cosin.}\,\alpha.\ \text{Cosin.}\,\delta = \text{Cosin.}\,l.\ \text{Cosin.}\,\lambda.$

(8) $\text{Sin.}\,\pi.\ \text{Cosin.}\,\delta = \text{Sin.}\,\omega.\ \text{Cosin.}\,l.$

(9) $\text{Sin.}\,\pi.\ \text{Cosin.}\,\lambda = \text{Sin.}\,\omega.\ \text{Cosin.}\,\alpha.$

§. 24.

Soit donc m = l'arc du grand cercle intercepté entre l'étoile et le point de l'équinoxe du printemps, et ε l'inclinaison du plan de ce grand cercle à l'écliptique; Alors $\text{Sin.}\,\lambda$ sera $= \text{Sin.}\,\varepsilon.\ \text{Sin.}\,m.$ et delà $d\lambda.\ \text{Cosin.}\,\lambda = d\varepsilon\ \text{Cosin.}\,\varepsilon.\ \text{Sin.}\,m + dm\ \text{Cosin.}\,m.\ \text{Sin.}\,\varepsilon.$ Or en désignant par $^{\circ}d^{n}u$ la différentielle n^{-ieme} d'une quantité quelconque prise en ne faisant varier que ω, et par $^{I}d^{n}u$ sa différentielle n^{-ieme} prise seulement par rapport à la précession des équinoxes, enfin par $d^{n}u$ sa différentielle complète du même ordre n, Alors $^{\circ}d\lambda\ \text{Cosin.}\,\lambda$ sera $= {}^{\circ}d\varepsilon\ \text{Cosin.}\,\varepsilon.\ \text{Sin.}\,m + {}^{\circ}dm\ \text{Cosin.}\,m.\ \text{Sin.}\,\varepsilon$; mais $^{\circ}dm = 0$, et $^{\circ}d\varepsilon = -d\omega$, donc $^{\circ}d\lambda\ \text{Cosin.}\,\lambda$ sera $= -d\omega\ \text{Cosin.}\,\varepsilon.$ Sinus m $= -d\omega\ \text{Sin.}\,l.\ \text{Cosin.}\,\lambda$, et delà $^{\circ}d\lambda = -d\omega\ \text{Sin.}\,l$; mais $^{I}d\lambda = 0$, et $d\lambda = {}^{\circ}d\lambda + {}^{I}d\lambda$, donc $d\lambda = -d\omega\ \text{Sin.}\,\lambda.$ Différentiant cette équation encore une fois, il s'ensuivra que $d^{2}\lambda$ sera $= -d\omega dl\ \text{Cosin.}\,l$; mais $dl = {}^{\circ}dl + {}^{I}dl$, et $^{\circ}dl = d\omega\ \text{Tang.}\,\lambda.\ \text{Cosin.}\,l.$ (voyez l'article suivant), donc $d^{2}\lambda = -{}^{I}dld\omega\ \text{Cosin.}\,l. - d\omega^{2}\ \text{Tang.}\,\lambda.\ \text{Cosin.}\,l^{2}.$ Par conséquent si t est un nombre quelconque d'années, h = 154.63 = le nombre des sécondes de la précession annuelle des équinoxes, k = 1.265 = le nombre des sécondes de la diminution annu-

elle de l'obliquité de l'écliptique, et a = 0.000001570796 = la valeur d'une séconde exprimée en parties du rayon, le nombre des secondes que contient $\Delta\lambda$ sera $= + tk$ Sin. $l + t^2 (\frac{1}{2}$ ahk Cosin. $l - \frac{1}{2}$ ak^2 Cosin. l^2. Tang. λ); c'est à dire, que pour la polaire la variation en latitude causée par la diminution de l'obliquité de l'écliptique jointe à la précession des équinoxes sera $= + 1''261544\, t + 0''0000000113 1566\, t^2$.

§. 25.

Au contraire s'il s'agissoit d'avoir la variation en longitude, il faudroit partir de l'équation suivante Cosin. l. Cosin. λ = Cosin. m, dont la différentielle donnera $^{\circ}$dl Sin. l. Cosin. λ + $^{\circ}$dλ Sin. λ. Cosin. l = o, et delà $^{\circ}$dl = — $^{\circ}$dλ Tang. λ. Cotang. l = + dω Sin. l. Tang. λ. Cotang. l (voyez l'article précédent) = + dω Tang. λ. Cosin. l, et dl = ^{1}dl + dω Tang. λ. Cosin. l; Par conséquent d^{2}l sera = + dωdλ. Sec. λ^2. Cosin. l — $^{\circ}$dldω Tang. λ. Sin. l — ^{1}dldω Tang. λ. Sin. l = — dω^2 Sec.λ^2. Sin. l. Cosin. l — dω^2 Tang. λ^2. Sin. l. Cosin. l — ^{1}dldω Tang. λ. Sin. l. D'où il s'ensuit que le nombre des sécondes que contient Δl sera = t (h — k Tang. λ. Cosin. l) + t^2 ($\frac{1}{2}$ ahk Tang. λ. Sin. l — $\frac{1}{2}$ ak^2 Sec. λ^2. Sin. l. Cosin. l — $\frac{1}{2}$ ak^2 Tang. λ^2. Sin. l. Cosin. l.); C'est à dire qu'en traitant de la polaire, la variation de celleci en longitude causée par la précession des équinoxes jointe à la diminution de l'obliquité de l'écliptique sera = + $154''41968\, t + 0''00034434 13\, t^2$.

§. 26.

Pour avoir la variation en ascension droite causée par les effêts réunis de la précession des équinoxes et de la diminution de l'obliquité de l'écliptique, il faut partir de cette équation: Tang. α = Tang. l. Cosin. ω — Tang. λ.

Sec. l. Sin. ω, la quelle se changera par la différentiation en celleci dα Sec. α^2 = $^{\circ}$dl Sec. l^2. Cosin. ω + ^{I}dl Sec. l^2. Cosin. ω — dω Tang. l. Sin. ω — dλ Sec. λ^2. Sec. l. Sin. ω — $^{\circ}$dl Tang. λ. Sec. l. Tang. l. Sin. ω — ^{I}dl Tang. λ. Sec. l. Tang. l. Sin. ω — dω Tang. λ. Sec. l. Cosin. ω; c'est à dire, qu'en substituant dans cette expression + dω Tang. λ. Cosin. l au lieu de $^{\circ}$dl, et — dω Sin. l au lieu de dλ (voyez les deux articles précédents), dα Sec. α^2 sera = + dω Tang. λ. Sec. l. Cosin. ω + ^{I}dl Sec. l^2. Cosin. ω — dω Tang. l. Sin. ω + dω. Sec. λ^2. Tang. l. Sin. ω — dω Tang. λ^2. Tang. l. Sin. ω — ^{I}dl Tang. λ. Sec. l. Tang. l. Sin. ω — dω Tang. λ. Sec. l. Cosin. ω = ^{I}dl Sec. l^2. Cosin. ω — ^{I}dl Tang. λ. Sec. l. Tang. l. Sin. ω = ^{I}dl Sec. l^2. Cosin. ω + ^{I}dl Tang. l. Tang. α — ^{I}dl Cosin. ω. Tang. l^2 = ^{I}dl Cosin. ω + ^{I}dl Tang. l. Tang. α = ^{I}dl Cosin. ω + ^{I}dl Tang. α^2. Cosin. ω + ^{I}dl Tang. δ. Sin. α. Sin. ω. Sec. α^2 = ^{I}dl Sec. α^2. Cosin. ω + ^{I}dl Tang. δ. Sin. α. Sin. ω. Sec. α^2, de sorte qu'en divisant par Sec. α^2 il en résultera dα = ^{I}dl (Cosin. ω + Tang. δ. Sin. α. Sin. ω) = ^{I}dl Sec. δ. Sin. ω. Cosin. α (Cosin. δ. Sec. α. Cotang. ω + Sin. δ. Tang. α) = ^{I}dl Sec. δ. Sin. π. Cosin. λ. Cotang. π = ^{I}dl Sec. δ. Cosin. λ. Cosin. π. = ^{I}dl Sec. l. Cosin. α. Cosin. π; donc en différentiant cette expression encore une fois, il s'ensuivra que $d^2\alpha$ sera = — ^{I}dl dω Sin. ω + ^{I}dl dω Tang. δ. Sin. α. Cosin. ω + ^{I}dl dδ Sec. δ^2. Sin. α. Sin. ω + ^{I}dl dα Tang. δ. Sin. ω. Cosin. α; mais ^{I}dl Cosin. α. Sin. ω = dδ (comme nous le verrons dans l'article suivant), donc $^{I}dl^2$ Sec. δ^2. Sin. ω^2. Sin. α. Cosin. α = ^{I}dl dδ Sec. δ^2. Sin. α. Sin. ω; et par conséquent, si b est = h (Cosin. ω + Tang. δ. Sin. α. Sin. ω) = h Sec. l. Cosin. α. Cosin.

sin. π, le nombre des sécondes que contient $\Delta\alpha$ sera $=$ bt $+$ t^2 ($\frac{1}{2}$ ah^2 Sec. δ^2 Sin. ω^2. Sin. α. Cosin. α $+$ $\frac{1}{2}$ abh Tang. δ. Sin. ω. Cosin. α $-$ $\frac{1}{2}$ ahk Tang. δ. Sin. α. Cosin. ω $+$ $\frac{1}{2}$ ahk Sin. ω); c'est à dire, que pour la polaire, sa variation en ascension droite causée par la précession des équinoxes jointe à la diminution de l'obliquité de l'écliptique sera $= + 595''7092$ t $+$ $1''6090392$ t^2 $=$ $+ 12''86732$ t $+$ $0''0347552$ t^2 (selon qu'il s'agit d'en avoir l'expression en arc de cercle ou en parties du tems sidéral).

§. 27.

De même, s'il s'agissoit d'avoir la variation en déclinaison, il faudroit partir de l'équation suivante Sin. δ $=$ Sin. l. Cosin. λ. Sin. ω $+$ Sin. λ. Cosin. ω, dont la différentielle sera dδ Cosin. δ $=$ ^{1}dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω $+$ ^{0}dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω $-$ dλ. Sin. l. Sin. λ. Sin. ω $+$ dω Sin. l. Cosin. λ. Cosin. ω $+$ dλ Cosin. λ. Cosin. ω $-$ dω Sin. λ. Sin. ω $=$ ^{1}dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω $+$ dω Cosin. l^2. Sin. λ. Sin. ω $+$ dω Sin. l^2. Sin. λ. Sin. ω $+$ dω Sin. l. Cosin. λ. Cosin. ω $-$ dω Sin. l. Cosin. λ. Cosin. ω $-$ dω Sin. λ. Sin. ω $=$ ^{1}dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω $=$ ^{1}dl Cosin. α. Cosin. δ. Sin. ω; divisant celleci par Cosin. δ, il en résultera dδ $=$ ^{1}dl Cosin. α. Sin. ω, et en différentiant de nouveau $d^2\delta$ $=$ ^{1}dl dω Cosin. α. Cosin. ω $-$ ^{1}dl dα Sin. α. Sin. ω. Donc le nombre des sécondes que contient $\Delta\delta$ sera $=$ ht Cosin. α. Sin. ω $-$ t^2 ($\frac{1}{2}$ ahk Cosin. α. Cosin. ω $+$ $\frac{1}{2}$ abh Sin. α. Sin. ω); de sorte qu'en faisant l'application de cette formule à la polaire, il en résultera pour sa variation en déclinaison (causée par la précession des équinoxes jointe à la diminution de l'obliquité de l'écliptique) l'expression suivante $\Delta\delta = + 59''97530$ t $-$ $0''00660708$ t^2.

O

§. 28.

Enfin s'il s'agissoit d'avoir la variation de l'angle de position, c'est l'équation suivante Sin. π. Cosin. λ = Sin. ω. Cosin. α qu'il faudroit différentier; donc dπ Cosin. π. Cosin. λ sera = dλ Sin. π. Sin. λ — dα Sin. ω. Sin. α + dω Cosin. ω. Cosin. α = — dω Sin. l. Sin. π. Sin. λ — dα Tang. α. Sin. ω. Cosin. α. + dω Cotang. ω. Sin. ω. Cosin. α = — dω Sin. l. Sin. π. Sin. λ — dα Tang. α. Sin. π. Cosin. λ + dω Cotang. ω. Sin. π. Cosin. λ, et delà en divisant par Cosin. π. Cosin. λ, dπ deviendra = — dω Sin. l. Tang. π. Tang. λ + dω Cotang. ω. Tang. π — dα Tang. α. Tang. π, mais dα Tang. α. Tang. π = ^{I}dl Sec. δ. Cosin. λ. Sin. π. Tang. α = ^{I}dl Sec. δ. Sin. ω. Sin. α, et Cotang. ω — Sin. l. Tang. λ = Cosin. l. Sec. λ (Cosin. λ. Sec. l. Cotang. ω — Tang. l. Sin. λ) = Cosin. l. Sec. λ. Cotang. π; donc dπ = dω Cosin. l. Sec. λ. — ^{I}dl Sec. δ. Sin. ω. Sin. α. = dω Cosin. l. Sec. λ — dδ Sec. δ. Tang. α, et $d^2\pi$ = — ^{I}dldω Sin. l. Sec. λ — $^{\circ}$dldω Sin. l. Sec. λ + dλdω Cosin. l. Tang. λ. Sec. λ — ^{I}dldω Sec. δ. Cosin. ω. Sin. α. — ^{I}dldδ Tang. δ. Sec. δ. Sin. ω. Sin. α — ^{I}dldα Sec. δ. Sin. ω. Cosin. α; or — $^{\circ}$dldω Sin. l. Sec. λ. est = — $d\omega^2$. Sec. λ. Tang. λ. Sin. l. Cosin. l, et dλdω Cosin. l. Tang. λ. Sec. λ = — $d\omega^2$. Sin. l. Cosin. l. Tang. λ. Sec. λ, et — ^{I}dldδ Sec. δ. Tang. δ. Sin. ω. Sin α = — $^{\mathrm{I}}dl^2$ Tang. δ. Sec. δ. Sin. α. Cosin. α. Sin. ω^2, donc $d^2\pi$ sera = — ^{I}dldα Sec. δ. Sin. ω. Cosin. α — $^{\mathrm{I}}dl^2$ Tang. δ. Sec. δ. Sin. α. Cosin. α. Sin. ω^2 — ^{I}dldω Sec. δ. Sin. α. Cosin. ω — $2d\omega^2$ Tang. λ. Sec. λ. Sin. l. Cosin. l. — ^{I}dl. dω Sin. l. Sec. λ. Par conséquent le nombre des sécondes que contient $\Delta\pi$ sera = — t (h.

Sin. α. Sin. ω. Sec. δ + k Cosin. l. Sec. λ) — t^2 ($\frac{1}{2}$ abh Cosin. α. Sin. ω. Sec. δ + $\frac{1}{2}$ ah^2 Sin. α. Cosin.α. Tang. δ. Sec. δ. Sin. ω^2 — $\frac{1}{2}$ ahk Sin. l. Sec. λ — $\frac{1}{2}$ ahk Sin. α. Cosin. ω. Sec. δ + ak^2 Tang. λ. Sec. λ. Sin. l. Cosin. l); c'est à dire, qu'en traitant de la polaire, la variation de l'angle de position, qui résulte de la précession des équinoxes jointe à la diminution de l'obliquité de l'écliptique sera $= - 454''3119t - 1''608708t^2$.

§. 29.

En déduisant les formules précédentes, que nous venons de mettre sous les yeux du lecteur (et d'aprés les quelles on peut trouver pour toutes les épôques le lieu moyen d'une êtoile quelconque prise à volonté) nous avons partout différentié l'équation primitive par rapport à ^{1}dl causé par la précession des équinoxes, et dω causé par le déplacement du plan même de l'écliptique; mais outre ces réductions il-y-a encore deux autres d'une espèce différente, savoir celles qui se rapportent à la Nutation de l'axe du monde et â l'aberration de la lumière. Or pour en avoir la première, il faut toujours différentier par rapport à dl, et dω causé par un mouvement du plan de l'équateur; de sorte que dans ce cas dl ne sera point du tout affecté de dω (comme dans le précédent, où nous avons vû que dl étoit = ^{1}dl + dω Tang. λ. Cosin. l) et de plus dλ sera = o; Donc en commençant par cette équation Tang. α = Tang. l. Cosin. ω -- Tang. λ. Sec. l. Sin. ω, il en résultera dα Sec. α^2 = dl Sec. l^2. Cosin. ω — dl Tang. λ. Tang. l. Sec. l. Sin. ω — dω Tang. l. Sin. ω — dω Tang. λ. Sec. l. Cosin. ω = dl Sec. l^2. Cosin. ω + dl Tang. l. Tang. α -- dl Tang. l^2. Cosin. ω — dω Sec. l. Sec. λ (Cosin. λ. Sin. l. Sin. ω + Sin. λ. Cosin. ω) = dl Cosin. ω + dl Tang. α^2. Cosin. ω + dl Sec. α^2. Tang. δ. Sin. α Sin. ω — dω Sec. α. Sec. δ. Sin. δ. = dl Sec.

α^2. (Cosin. ω + Tang. δ. Sin. α. Sin. ω) — dω Sec. α. Tang. δ, et delà dα = dl (Cosin. ω + Tang. δ. Sin. α. Sin. ω) — dω Cosin. α. Tang. δ = dl Sin. ω. Cosin. α. Sec. δ (Cosin. δ. Sec. α, Cotang. ω + Tang. α. Sin. δ) — dω Cosin. α. Tang. δ = dl Sin. ω. Cosin. α. Sec. δ. Cotang. π — dω Cosin. α. Tang. δ. Substituant dans cette expression — μ Sin. θ au lieu de dl, et + ν Cosin. θ au lieu de dω, enfin faisant ν Sin. δ. Tang. θ_0 = μ Sin. ω. Cotang. π = μ Sin. ω. Cosec. π. Cosin. π = μ Cosin. δ. Sec. l. Cosin. π, c'est à dire Tang. $\theta_0 = \frac{\mu}{\nu}$ Cotang. δ. Sec. l. Cosin. π, il s'ensuivra que dα sera = — μ Sin. ω. Cosin. α. Sec. δ. Cotang. π. Sin. θ — ν Cosin. α. Tang. δ. Cosin. θ = — ν Sin. δ. Tang. θ_0. Cosin. α. Sec. δ. Sin. θ. — ν Cosin. α. Tang. δ. Cosin. θ = — ν Cosin. α. Tang. δ. Sec. θ_0 (Sin. θ. Sin. θ_0 + Cosin. θ. Cosin. θ_0) = — ν Cosin. α. Tang. δ. Sec. θ_0. Cosin. $(\theta - \theta_0)$; de sorte qu'en faisant dl = — 55''370 Sin. ☊ — 3''088. Sin. 2☉ — 0''231 Sin. 2☾ = la nutation en longitude, et dω = + 29''630 Cosin. ☊ + 1''341 Cosin. 2☉ + 0''100 Cosin. 2☾ = la nutation de l'obliquité de l'ecliptique; enfin Tang. $☊_0 = \frac{55370}{29630}$ Cotang. δ. Sec. l. Cosin. π, Tang. $2☉_0 = \frac{3088}{1341}$ Cotang. δ. Sec. l. Cosin. π, et Tang. $2☾_0$ = 2.31 Cotang. δ. Sec. l. Cosin. π, dα ou la nutation en ascension droite sera — 29''630 Cosin. α. Tang. δ. Sec. $☊_0$. Cosin. $(☊ - ☊_0)$ — 1''341 Cosin. α. Tang. δ. Sec. $2☉_0$. Cosin. $(2☉ - 2☉_0)$ — 0.''1 Cosin. α. Tang. δ. Sec. $2☾_0$. Cosin. $(2☾ - 2☾_0)$ = — 0''6400 Cosin. α. Tang. δ. Sec. $☊_0$. Cosin. $(☊ - ☊_0)$ — 0''0290 Cosin. α. Tang. δ. Sec. $2☉_0$. Cosin. $(2☉ - 2☉_0)$ — 0''0022. Cosin. α. Tang. δ. Sec. $2☾_0$. Cosin. $(2☾ - 2☾_0)$ selon qu'on veut l'avoir exprimée en arc de cercle ou en parties du tems sidéral.

§. 30.

Cette formule sert à construire des tables particulieres pour la nutation en ascension droite; mais pour en avoir une autre d'aprés la quelle on pourroit construire des tables générales, il vaudroit mieux s'en tenir à cette expression $d\alpha = dl$ Cosin. $\omega +$ Tang. δ (dl Sin. α. Sin. $\omega - d\omega$. Cosin. α). Substituant dans celleci $- \mu$ Sin. θ au lieu de dl, et $+ \nu$ Cosin. θ au lieu de $d\omega$, il en résultera $d\alpha = - \mu$ Cosin. ω Sin. θ — Tang. δ. (μ Sin. ω. Sin. α. Sin. $\theta + \nu$ Cosin. α. Cosin. θ) $= - \mu$ Cosin. ω. Sin. θ. — Tang. δ (($\frac{1}{2}$ μ Sin. $\omega + \frac{1}{2}$ ν). Cosin. ($\theta - \alpha$) + ($\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ μ Sin. ω). Cosin. ($\theta + \alpha$)); desorte qu'en faisant dl = la nutation en longitude, et $d\omega$ = la nutation de l'obliquité de l'écliptique, la valeur qui en résultera pour la nutation en ascension droite sera = — 50''7906 Sin. ☊ — Tang. δ. (25''83933 Cosin. (☊ — α) + 3''79067. Cosin. (☊ + α)) — 2''83261 Sin. 2⊙ — Tang. δ. (1''28533 Cosin. (2⊙ — α) + 0''05567 Cosin. (2⊙ + α)) — 0''2119 Sin. 2☾ — Tang. δ. (0''09599 Cosin. (2☾ — α) + 0''00401 Cosin. (2☾ + α)) quand elle est exprimée en arc de cercle, et $d\alpha$ = — 1''097077 Sin. ☊ — Tang. δ. (0''558130 Cosin. (☊ — α) + 0''081878 Cosin. (☊ + α)) — 0''061184 Sin. 2⊙ — Tang. δ. (0''027763 Cosin. (2⊙ — α) + 0''001202 Cosin. (2⊙ + α)) — 0''004577 Sin. 2☾ — Tang. δ. (0''002073 Cosin. (2☾ — α) + 0''000087 Cosin. (2☾ + α)) quand elle est exprimée en parties du tems sidéral.

§. 31.

De même, différentiant l'équation suivante Sin. δ. = Sin. l. Cosin. λ. Sin. ω + Sin. λ. Cosin. ω par rapport aux mêmes variables que la précédente, il s'ensuit que $d\delta$ Cosin. δ = dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω + $d\omega$ Sin. l. Cosin. λ. Cosin. ω — $d\omega$ Sin. λ. Sin. ω = dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω + $d\omega$ Cosin. l. Cosin. λ. (Tang. l. Cosin. ω — Tang. λ. Sec. l. Sin. ω) = dl Cosin. α. Cosin. δ. Sin. ω + $d\omega$ Cosin. α. Cosin. δ. Tang. α = dl Cosin. α. Cosin. δ. Sin. ω + $d\omega$ Cosin. δ. Sin. α, de sorte qu'en divisant par Cosin. δ, il en résultera $d\delta$ = dl Cosin. α. Sin. ω + $d\omega$ Sin. α. Substituant dans celleci — μ Sin. θ au lieu de dl, et + ν Cosin. θ au lieu de $d\omega$, nous en aurons $d\delta$ = — μ Sin. ω. Cosin. α. Sin. θ + ν Sin. α. Cosin. θ = — ($\frac{1}{2}$ ν + $\frac{1}{2}$ μ Sin. ω). Sin. (θ — α) + ($\frac{1}{2}$ ν — $\frac{1}{2}$ μ Sin. ω). Sin. (θ + α); enfin faisant Tang. $\theta_1 = \frac{\mu}{\nu}$ Sin. ω. Cotang. α. c'est à dire ν Sin. α. Sin. θ_1 = μ Sin. ω Cosin. α. Cosin. θ_1, $d\delta$ deviendra = — Sec. θ_1 (μ Sin. ω. Cosin. α. Cosin. θ_1. Sin. θ — ν Sin. α. Cosin. θ_1. Cosin. θ) = — ν Sin. α. Sec. θ_1. (Sin. θ_1. Sin. θ — Cosin. θ_1. Cosin. θ) = + ν Sin. α. Sec. θ_1. Cosin. (θ + θ_1). Donc en faisant dl = la nutation en longitude, $d\omega$ = la nutation de l'obliquité de l'écliptique, Tang. $☊_1 = \frac{55370}{29630}$ Sin. ω. Cotang. α, Tang. $2☉_1 = \frac{3088}{1341}$ Sin. ω. Cotang. α, et Tang. $2☾_1$ = 2.31 Sin. ω. Cotang. α, $d\delta$ ou la nutation en déclinaison deviendra = + 29''630. Sin. α. Sec. $☊_1$. Cosin. ($☊$ + $☊_1$) + 1''341 Sin. α. Sec. $2☉_1$. Cosin. ($2☉$ + $2☉_1$) + 0''100 Sin. α. Sec. $2☾_1$ Cosin ($2☾$ + $2☾_1$) = — 25''83933 Sin. ($☊$ — α) + 3''79067 Sin. ($☊$ + α) — 1''28533 Sin. ($2☉$ — α) + 0''05567 Sin. ($2☉$

$+ \alpha) - 0''09599$ Sin. $(2☾ - \alpha) + 0''00401$ Sin. $(2☾ + \alpha)$, dont il faut employer la premiere expression quand il s'agit de calculer des tables de nutation en déclinaison pour des étoiles particulières, au lieu qu'en se proposant de construire des tables générales, il vaut mieux s'en tenir à la séconde formule.

§. 32.

Pour avoir l'effêt de l'aberration sur l'ascension droite et la declinaison des étoiles il faut différentier les équations précédentes par rapport à dl et $d\lambda$; de sorte qu'en commençant par celleci Tang. $\alpha =$ Tang. l. Cosin. ω — Tang. λ. Sec. l. Sin. ω, $d\alpha$ Sec. α^2 deviendra $=$ dl Sec. l^2. Cosin. ω — dl Tang. λ. Tang. l. Sec. l. Sin. ω — $d\lambda$ Sec. λ^2. Sec. l. Sin. $\omega =$ Sec. λ. Sec. l. Sin. ω. $\Big($dl (Cosin. λ. Sec. l. Cotang. ω — Sin. λ. Tang. l) — $d\lambda$ Sec. $\lambda\Big) =$ Sec. α. Sec. δ. Sin. π. Cosin. λ. Sec. α. (dl Cotang. π — $d\lambda$ Sec. λ) $=$ Sec. α^2. Sec. δ. (dl Cosin. λ. Cosin. π — $d\lambda$ Sin. π), et en divisant par Sec. α^2, $d\alpha =$ Sec. δ. (dl Cosin. λ. Cosin π — $d\lambda$ Sin. $\pi\big)$. Par conséquent si dl étoit $= - \mu$ Sec. λ. Cosin. $(1 - \theta)$, et $d\lambda = + \mu$ Sin. λ. Sin. $(1 - \theta)$, $d\alpha$ seroit $=$ — Sec. δ. $\Big(\mu$ Cosin. π. Cosin. $(1 - \theta) + \mu$ Sin. λ. Sin. π. Sin. $(1 - \theta)\Big) = - \mu$ Sec. δ. $\Big($Cosin. θ (Cosin. π. Cosin. l + Sin. π. Sin. λ. Sin. l) + (Cosin. π. Sin. l — Sin. π. Sin. λ. Cosin. l) Sin. $\theta\Big)$; mais en multipliant l'équation suivante Cotang. $\pi =$ Cosin. λ. Sec. l. Cotang. ω — Sin. λ. Tang. l. par Cosin. l. Sin. π, Cosin. π. Cosin. l devient $=$ Sin. π. Cosin. λ. Cotang. ω — Sin. π. Sin. λ. Sin. l et delà Cosin. π. Cosin. l + Sin. π. Sin. λ. Sin. l $=$ Sin. π. Cosin. λ. Cotang. $\omega =$ Sin. ω. Cosin. α. Cotang. $\omega =$ Cosin. ω. Co-

sin. α; et en la multipliant par Sin. π. Sin. l, Cosin. π. Sin. l devient $=$ Sin. π. Cosin. λ. Tang. l. Cotang. ω $-$ Sin. π. Sin. λ. Sec. l. Sin. l^2 $=$ Cosin. α. Tang. l. Cosin. ω $-$ Sin. π. Sin. λ. Sec. l $+$ Sin. π. Sin. λ. Cosin. l; et delà Cosin. π. Sin. l $-$ Sin. π. Sin. λ. Cosin. l $=$ Cosin. α. (Tang. l. Cosin ω $-$ Sin. π. Sec. α. Sin. λ. Sec. l.) $=$ Cosin. α (Tang. l. Cosin. ω $-$ Tang. λ. Sec. l. Sin. ω) $=$ Cosin. α. Tang. α $=$ Sin. α; Donc dα est $= - \mu$ Sec. δ (Cosin. ω. Cosin. α. Cosin. θ $+$ Sin. α. Sin. θ), d'où il s'ensuit qu'en faisant Tang. m $=$ Sec. ω. Tang. α c'est à dire Sin. m. Cosin. ω. Cosin. α. $=$ Sin. α. Cosin. m, dα sera $= - \mu$ Sec. δ. Sin. α. Cosec. m (Cosin. m. Cosin. θ $+$ Sin. m. Sin. θ) $= - \mu$ Sec. δ. Sin. α. Cosec. m. Cosin. ($\theta - $m) $= - \mu$ Sec. δ. (Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. $(\theta - \alpha)$ $-$ Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. $(\theta + \alpha)$). Or $-$ 62''5088 Sec. λ (Cosin. (l $- \odot$) $-$ 0.01678990 Cosin. (l $-$ Apogée)) est $=$ l'aberration en longitude, et $+$ 62''5088 Sin. λ. (Sin. (l $- \odot$) $-$ 0''01678990. Sin. (l $-$ Apogée)) $=$ l'aberration en latitude; Donc en substituant ces quantités au lieu de dl et dλ, il s'ensuivra que dα ou l'aberration en ascension droite sera $= -$ 62''5088 Sin. α. Cosec. m. Sec. δ. Cosin. ($\odot -$ m) $+$ 1''049443 Sin. α. Cosec. m. Sec. δ. Cosin. (Apogée $-$ m) $= -$ 62''5088 Sec. δ. (Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. $(\odot - \alpha)$ $-$ Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. $(\odot + \alpha)$) $+$ 1''049443 Sec. δ. (Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. (Apogée $- \alpha$) $-$ Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Cosin. (Apogée $+ \alpha$)) quand elle est exprimée en arc de cercle, et dα $= -$ 1''35019 Sin. α. Cosec. m. Sec. δ. Cosin. ($\odot -$ m) $+$

$0''022668$ Sin. α. Cosec. m. Sec. δ. Cosin. (Apogée — m) $= - 1''35019$ Sec. δ. $\left(\text{Cosin. } (\frac{1}{2}\omega)^2 . \text{ Cosin. } (\odot - \alpha) - \text{Sin. } (\frac{1}{2}\omega)^2 . \text{ Cosin. } (\odot + \alpha)\right) + 0''022668$ Sec. δ. $\left(\text{Cosin. } (\frac{1}{2}\omega)^2 . \text{ Cosin. (Apogée} - \alpha) - \text{Sin. } (\frac{1}{2}\omega)^2 . \text{ Cosin. (Apogée} + \alpha)\right)$ quand elle est exprimée en parties du tems sidéral.

§. 33.

Reprenant l'équation Sin. δ = Sin. l. Cosin. λ. Sin. ω + Sin. λ. Cosin ω, que nous supposerons de même différentiée par rapport à dl et dλ, il s'ensuit que dδ Cosin. δ = dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω + dλ Cosin. λ. Cosin. ω — dλ Sin. l. Sin. λ. Sin. ω = dl Cosin. l. Cosin. λ. Sin. ω + dλ. Cosin. l. Sin. ω. (Cosin. λ. Sec. l. Cotang. ω — Tang. l. Sin. λ) = dl Cosin. α. Cosin. δ. Sin. ω + dλ Sin. π. Cosin. δ. Cotang. π, et en divisant par Cosin. δ, dδ = dl Sin. ω Cosin. α + dλ Cosin. π = dl Sin. π. Cosin. λ + dλ Cosin. π. Donc en substituant — μ Sec. λ. Cosin. (l — θ) au lieu de dl, et + μ Sin. λ. Sin. (l — θ) au lieu de dλ, dδ = — μ Sin. π. Cosin. (l — θ) + μ Sin. λ. Cosin. π. Sin. (l — θ) = μ Cosin. θ (— Sin. π. Cosin. l + Sin. λ. Cosin. π. Sin. l) — μ Sin. θ. (Sin. π. Sin. l + Sin. λ. Cosin. π. Cosin. l). Or Cosin. π. Sin. l — Sin. π. Sin. λ. Cosin. l étant = Sin. α, Cosin. π. Sin. l. Sin. λ — Sin. π. Sin. λ^2. Cosin. l sera = Sin. α. Sin. λ = Sin. α. Sin. δ. Cosin. ω — Sin. α^2. Cosin. δ. Sin. ω, et delà Cosin. π. Sin. l. Sin. λ — Sin. π. Cosin l = Sin. α Sin. δ. Cosin. ω — Sin. α^2. Cosin. δ. Sin. ω — Sin. π. Cosin. λ. Cosin. λ. Cosin. l = Sin. α Sin. δ. Cosin. ω

— Sin. α^2. Cosin. δ. Sin. ω — Sin. ω. Cosin. α. Cosin. α. Cosin. δ = Sin. δ. Sin. α. Cosin. ω — Cosin. δ. Sin. ω, et Cosin π. Cosin. l étant = Cosin. ω. Cosin. α — Sin. π. Sin. l. Sin. λ; Cosin. π. Cosin. l. Sin. λ + Sin. π. Sin. l. Sin. λ^2 sera = Cosin. ω. Cosin. α. Sin. λ = Cosin. α. Sin. δ. Cosin. ω^2 — Sin. ω. Cosin. ω. Sin. α. Cosin. α. Cosin. δ; De plus Sin. π. Sin. l. Cosin. λ^2 = Sin. π. Cosin. λ. Cosin. λ. Cosin. l. Tang. l = Sin. ω. Cosin. α. Cosin. α. Cosin. δ (Sin. ω. Tang. δ. Sec. α + Tang. α. Cosin. ω) = Sin. ω^2. Sin. δ. Cosin. α + Sin. ω. Cosin. ω. Sin. α. Cosin. α. Cosin. δ, donc Cosin. π. Cosin. l. Sin. λ + Sin. π. Sin. l = Cosin. α. Sin. δ, et dδ = μ Cosin. θ (Sin. δ. Sin α. Cosin. ω — Cosin. δ. Sin. ω) — μ Sin. θ. Cosin. α. Sin. δ. = μ Sin. δ. (Sin. α. Cosin. ω. Cosin. θ — Cosin. α. Sin. θ) — μ Sin. ω. Cosin. δ. Cosin. θ, c'est à dire qu'en faisant Tang. n = Sin. ω. Cotang. δ. Sec. α — Cosin. ω. Tang. α, ou Sin. δ. Cosin. α. Sin. n = (Sin. ω. Cosin. δ — Sin. δ. Sin. α. Cosin. ω) Cosin. n, dδ sera = — μ Sec. n. Sin. δ. Cosin. α (Sin. n. Cosin. θ + Cosin. n. Sin. θ) = — μ Sec. n. Sin. δ. Cosin. α. Sin. (n + θ) = — μ Sin. δ. (Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (θ + α) + Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (θ — α)) — $\frac{\mu}{2}$ Sin. ω(Cosin. (θ — δ) + Cosin. (θ + δ)); de sorte qu'en faisant dl = l'aberration en longitude, et dλ = l'aberration en latitude, dδ ou l'aberration en déclinaison deviendra = — 62''5088 Sec. n. Sin. δ. Cosin. α. Sin. (n + ⊙) + 1''049443 Sec. n. Sin. δ. Cosin. α. Sin. (n + Apogée) = — 62''5088 Sin. δ. (Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (⊙ + α) + Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (⊙ — α)) — 31''2544 Sin. ω(Co-

sin. $(\odot - \delta)$ + Cosin. $(\odot + \delta)\big)$ + $1''04944$ Sin.δ. $\big($Sin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (Apogée + α) + Cosin. $(\frac{1}{2}\omega)^2$. Sin. (Apogée — α)$\big)$ + $0''524721$ Sin. ω $\big($Cosin. (Apogée — δ) + Cosin. (Apogée + δ)$\big)$.

§. 34.

Les expressions que nous venons d'adopter pour les aberrations en longitude et en latitude étant un peu différentes de celles qu'on employe communement, nous en allons donner la preuve, en faisant voir que toute la différence dérive de l'ellipticité de l'orbite de la terre dont on a négligé l'effet pour altérer ces éléments. Soit donc ♈σϱ♎♁K♈ (voyez la Figure 28) l'orbite de la terre, dont l'excentricité est = e, Σ son foyer ou le centre du Soleil, Kϱ la ligne des apsides et ♎♈ celle des équinoxes, enfin η le lieu d'une étoile quelconque projetée sur le plan de l'écliptique, et ♁ celui de la terre dans son orbite; alors ♈Σσ sera = $\odot$ = la longitude du Soleil, ♈Ση = l = la longitude de l'étoile, ♈Σϱ = la longitude de l'apogée, σΣϱ = 400° — l'anomalie vraie = 400° — φ, Σ♁η = σΣη = ♈Ση — ♈Σσ = l — $\odot$,

$$\Sigma♁ = \frac{1 - e^2}{1 - e \text{ Cosin. } \varphi},\ ♁\omega = \frac{- e(1 - e^2)\, d\varphi \text{ Sin. } \varphi}{(1 - e \text{ Cosin. } \varphi)^2},\ \omega\pi = \frac{(1 - e^2)\, d\varphi}{1 - e \text{ Cosin. } \varphi},\ \text{Tang. } \omega♁\pi = \frac{1 - e \text{ Cosin. } \varphi}{- e \text{ Sin. } \varphi},\ \text{Sin. } \omega♁\pi$$

$$= \frac{1 - e \text{ Cosin. } \varphi}{\sqrt{1 - 2e \text{ Cosin. } \varphi + e^2}},\ \text{Cosin. } \omega♁\pi = \frac{- e \text{ Sin. } \varphi}{\sqrt{1 - 2e \text{ Cosin. } \varphi + e^2}}.\ \text{Sin. } \eta♁\pi = \text{Sin. } (\eta♁\omega + \omega♁\pi)$$

= Sin. $\eta♁\omega$. Cosin. $\omega♁\pi$ + Cosin. $\eta♁\omega$. Sin. $\omega♁\pi$ = Sin.

$(l - \odot)$. Cosin. $\omega\zeta\pi$ — Cosin. $(l - \odot)$. Sin. $\omega\zeta\pi =$
$$\frac{-\text{Cosin.}(l-\odot) + e\,\text{Cosin.}\,\phi.\,\text{Cosin.}(l-\odot) - e\,\text{Sin.}\,\phi.\,\text{Sin.}(l-\odot)}{\sqrt{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}};$$
Or ϕ étant $= \odot$ — Apogée, $\phi + l - \odot$ sera $= l$ — Apogée, et par conséquent Sin. $\eta\zeta\omega\pi =$
$$\frac{-\text{Cosin.}(l - \odot) + e\,\text{Cosin.}\,(l - \text{Apogée})}{\sqrt{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}}.$$ De même Cosin. $\eta\zeta\pi =$ Cosin. $(\eta\zeta\omega + \omega\zeta\pi) =$ Cosin. $\eta\zeta\omega$ Cosin. $\omega\zeta\pi$ — Sin. $\eta\zeta\omega$. Sin. $\omega\zeta\pi = -$ Cosin. $(l - \odot)$. Cosin. $\omega\zeta\pi$ — Sin. $(l - \odot)$. Sin. $\omega\zeta\pi =$
$$\frac{-\text{Sin.}(l-\odot) + e\,\text{Cosin.}\,\phi.\,\text{Sin.}(l-\odot) + e\,\text{Sin.}\,\phi.\,\text{Cosin.}(l-\odot)}{\sqrt{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}}$$
$$= \frac{-\text{Sin.}(l - \odot) + e\,\text{Sin.}\,(l - \text{Apogée})}{\sqrt{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}},$$ et si l'on suppose que v soit = la vitesse de la terre dans le point ζ, et V = la vitesse qu'elle auroit en décrivant autour de Σ un cercle dont le rayon seroit = la moitié du grand axe Kϱ, v^2 sera $= V^2 \left(\frac{2}{\Sigma\zeta} - 1\right) = V^2$. $\left(\frac{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}{1 - e^2}\right)$ et par conséquent $v = V$. $\frac{\sqrt{1 - 2\,e\,\text{Cosin.}\,\phi + e^2}}{\sqrt{1 - e^2}}$. De plus si nous désignons par r la plus grande aberration d'une étoile située dans l'écliptique et correspondante à la vitesse V, l'aberration en longitude d'une étoile quelconque sera $= +$ rSec. λ. Sin. $\eta\zeta\omega\pi$. $\frac{v}{V}$ lorsque la, terre est en ζ, et l'aberration en latitude $= -$ r Sin. λ. Cosin. $\eta\zeta\omega\pi$. $\frac{v}{V}$; donc l'aber-

ration en longitude est $= \frac{-r}{\sqrt{1-e^2}} \Big(\text{Cosin.}\ (l - \odot)$ $- e\ \text{Cosin.}\ (l - \text{Apogée})\Big)$, et aberration en latitude $= \frac{+r}{\sqrt{1-e^2}} \Big(\text{Sin.}\ (l - \odot) - e\ \text{Sin.}\ (l - \text{Apogée})\Big)$, tout comme nous l'avons supposé précédemment, en ayant fait $r = 62''5$, $e = 0.01678990$, $\frac{r}{\sqrt{1-e^2}} = 62''5088$, et $\frac{re}{\sqrt{1-e^2}} = 1''049443$.

§. 35.

D'aprés ces formules que nous venons de rapporter nous avons calculé le tableau suivant; et quant au terme de la nutation en déclinaison dont l'argument est le lieu du noeud ascendant de la lune, nous l'avons calculé en deux hypothêses, savoir tant pour le lieu vrai du noeud ascendant que pour son lieu moyen. En effet la différence qui en résulte n'est pas de beaucoup de conséquence; mais dans des cas extraordinaires elle peut pourtant monter jusqu'à $1''2$, et comme la principale des inégalités du noeud ascendant ou $1°8105$ Sin. $2\ (\odot - \Omega)$ change fort rapidement, de sorte que dans le cours de trois mois elle peut passer de son maximum positif jusqu' au négatif, il en peut arriver que la différence des latitudes de deux lieux quelconques, conclue des observations correspondantes de la Polaire dont l'intervalle seroit de deux à trois mois, soit différente de $2''4$ de celle qu'on auroit trouvé en calculant les nutations d'aprés le noeud moyen. Quant à nos opérations, l'arc du méridien conclû du noeud vrai devient plusgrand de $0'871$ que celui conclû de noeud moyen. Cela est bien digne d'être remarqué, et à mon avis il vaudroit bien la peine de refaire conformément à ces principes les calculs des observations modernes qu'on

a fait sur l'étoile polaire; peut être trouveroit on par là, que la source des plus petites inégalités, telles que celles de 3 ou 4 secondes, est cachée dans un défaut des formules de réductions qu'on a employé, et qu'en effet les observations sont plus d'accord qu'on ne l'a soupçonné; mais nous aurons occasions d'en parler plus dans la suite, voici le tableau dont nous venons de faire mention.

1802. Le Jour.	Aberration en Ascension Droite.	Nutation en Ascens. Droite ☊ Moyen.	Nutation en Ascens. Droite ☉.	Nutation en Ascens. Droite ☾.
Sept. 9	+ 36″1970	− 17″8582	− 0″7070	+ 0″0097
11	+ 36″8235	− 17″8381	− 0″7495	− 0″0570
14	+ 37″6850	− 17″8079	− 0″8068	− 0″0447
16	+ 38″2059	− 17″7877	− 0″8405	+ 0″0207
17	+ 38″4504	− 17″7776	− 0″8559	+ 0″0491
19	+ 38″9061	− 17″7573	− 0″8838	+ 0″0716
20	+ 39″1173	− 17″7471	− 0″8962	+ 0″0634
21	+ 39″3174	− 17″7369	− 0″9075	+ 0″0448
23	+ 39″6835	− 17″7165	− 0″9271	− 0″0111
29	+ 40″5050	− 17″6548	− 0″9597	− 0″0331
Octobre 5	+ 40″9016	− 17″5927	− 0″9520	+ 0″0547
8	+ 40″9377	− 17″5614	− 0″9329	− 0″0434
11	+ 40″8713	− 17″5299	− 0″9038	− 0″0578
13	+ 40″7557	− 17″5089	− 0″8790	+ 0″0473
15	+ 40″5978	− 17″4878	− 0″8499	+ 0″0608
21	+ 39″8325	− 17″4241	− 0″7388	− 0″0291
24	+ 39″2866	− 17″3921	− 0″6708	− 0″0714
Dec. 10	+ 18″2099	− 16″8730	+ 0″7409	+ 0″0716
11	+ 17″5591	− 16″8615	+ 0″7622	+ 0″0669
18	+ 12″8535	− 16″7813	+ 0″8831	− 0″0709
20	+ 11″4681	− 16″7583	+ 0″9080	− 0″0379
23	+ 9″3625	− 16″7236	+ 0″9368	+ 0″0520
24	+ 8″5544	− 16″7120	+ 0″9440	+ 0″0690
25	+ 7″9435	− 16″7004	+ 0″9500	+ 0″0702
26	+ 6″8724	− 16″6830	+ 0″9569	+ 0″0417
27	+ 6″1556	− 16″6714	+ 0″9599	+ 0″0085

1802. Le Jour.	Aberration et Nut. en Ascension Droite.	Ascens. Droite Moyenne $0^h\ 52'$	Ascens. Droite Apparente $0^h\ 52'$	Aberration en Declinaison.
Sept. 9	+ 17″6415	55″8636	73″5045	— 25″1424
11	+ 18″1789	55″9344	74″1133	— 23″2215
14	+ 19″0256	56″0414	75″0670	— 20″2849
16	+ 19″5984	56″1128	75″7112	— 18″2935
17	+ 19″8660	56″1485	76″0145	— 17″2875
19	+ 20″3366	56″2198	76″5564	— 15″2590
20	+ 20″5374	56″2555	76″7929	— 14″2366
21	+ 20″7178	56″2912	77″0090	— 13″2090
23	+ 21″0288	56″3625	77″3913	— 11″1396
29	+ 21″8574	56″5766	78″4340	— 4″8409
Octobre 5	+ 22″4116	56″7907	79″2023	+ 1″5396
8	+ 22″4000	56″8977	79″2977	+ 4″7390
11	+ 22″3798	57″0048	79″3846	+ 7″9337
13	+ 22″3205	57″0761	79″3966	+ 10″0566
15	+ 22″3209	57″1475	79″4684	+ 12″1716
21	+ 21″6405	57″3615	79″0020	+ 18″4426
24	+ 21″1523	57″4686	78″6209	+ 21″5205
Dec. 10	+ 2″1494	59″1455	61″2949	+ 57″9790
11	+ 1″5267	59″1812	60″7079	+ 58″4072
18	— 3″1156	59″4309	56″3153	+ 60″8950
20	— 4″4201	59″5023	55″0822	+ 61″4509
23	— 6″3723	59″6093	53″2370	+ 62″1152
24	— 7″1446	59″6450	52″5004	+ 62″3016
25	— 7″7367	59″6807	51″9440	+ 62″4687
26	— 8″8120	59″7342	50″9222	+ 62″6832
27	— 9″5474	59″7699	50″2225	+ 62″8019

1802. Le Jour.		Nutation en Declinaison ☊ Moyen.		Nutation en Declinaison ☊ Vrai.		Nutation en Declinaison ☉.		Nutation en Declinaison ☾.	
Sept.	9	+	13″3256	+	13″220	+	0″8159	+	0″0919
	11	+	13″3592	+	13″217	+	0″7511	+	0″0542
	14	+	13″4094	+	13″209	+	0″6476	—	0″0737
	16	+	13″4428	+	13″204	+	0″5746	—	0″0878
	17	+	13″4595	+	13″196	+	0″5371	—	0″0658
	19	+	13″4929	+	13″193	+	0″4601	+	0″0080
	20	+	13″5096	+	13″193	+	0″4208	+	0″0452
	21	+	13″5262	+	13″193	+	0″3810	+	0″0737
	23	+	13″5595	+	13″196	+	0″2999	+	0″0909
	29	+	13″6590	+	13″228	+	0″0708	—	0″0831
Octobre	5	+	13″7581	+	13″276	—	0″2042	+	0″0616
	8	+	13″8075	+	13″305	—	0″3287	+	0″0722
	11	+	13″8568	+	13″336	—	0″4498	—	0″0566
	13	+	13″8897	+	13″357	—	0″5281	—	0″0920
	15	+	13″9224	+	13″380	—	0″6039	—	0″0472
	21	+	14″0204	+	13″473	—	0″8133	+	0″0835
	24	+	14″0692	+	13″529	—	0″9057	—	0″0106
Dec.	10	+	14″8199	+	15″007	—	0″7659	—	0″0049
	11	+	14″8356	+	15″039	—	0″7311	+	0″0355
	18	+	14″9449	+	15″265	—	0″4642	—	0″0171
	20	+	14″9761	+	15″320	—	0″3819	—	0″0797
	23	+	15″0227	+	15″403	—	0″2549	—	0″0620
	24	+	15″0382	+	15″429	—	0″2118	—	0″0234
	25	+	15″0537	+	15″451	—	0″1685	+	0″0213
	26	+	15″0769	+	15″488	—	0″1031	+	0″0518
	27	+	15″0923	+	15″490	—	0″0594	+	0″0920

1802. Le Jour.	Nutation en Declinaison toute entiere ☊ Moyen.	Nútation en Declinaison toute entiere ☊ Vrai.	Aberration et Nutation en Declinaison ☊ Moyen.	Aberration et Nutation en Declinaison ☊ Vrai.
Sept. 9	+ 14″2334	+ 14″1278	— 10″9090	— 11″0146
11	+ 14″1645	+ 14″0223	— 9″0570	— 9″1992
14	+ 13″9833	+ 13″7829	— 6″3016	— 6″5020
16	+ 13″9296	+ 13″6908	— 4″3639	— 4″6027
17	+ 13″9308	+ 13″6673	— 3″3567	— 3″6202
19	+ 13″9610	+ 13″6611	— 1″2980	— 1″5979
20	+ 13″9756	+ 13″6590	— 0″2610	— 0″5776
21	+ 13″9809	+ 13″6477	+ 0″7719	+ 0″4387
23	+ 13″9503	+ 13″5868	+ 2″8107	+ 2″4472
29	+ 13″6467	+ 13″2157	+ 8″8058	+ 8″3748
Octobre 5	+ 13″6155	+ 13″1334	+ 15″1551	+ 14″6730
8	+ 13″5510	+ 13″0485	+ 18″2900	+ 17″7875
11	+ 13″3504	+ 12″8296	+ 21″2841	+ 20″7633
13	+ 13″2696	+ 12″7369	+ 23″3262	+ 22″7935
15	+ 13″2713	+ 12″7289	+ 25″4429	+ 24″9005
21	+ 13″2906	+ 12″7432	+ 31″7332	+ 31″1858
24	+ 13″1529	+ 12″6127	+ 34″6734	+ 34″1332
Dec. 10	+ 14″0491	+ 14″2362	+ 72″0281	+ 72″2152
11	+ 14″1400	+ 14″3434	+ 72″5472	+ 72″7506
18	+ 14″4636	+ 14″7837	+ 75″3586	+ 75″6787
20	+ 14″5145	+ 14″8584	+ 75″9654	+ 76″3093
23	+ 14″7058	+ 15″0861	+ 76″8210	+ 77″2013
24	+ 14″8030	+ 15″1938	+ 77″1046	+ 77″4954
25	+ 14″9065	+ 15″3038	+ 77″3752	+ 77″7725
26	+ 15″0256	+ 15″4367	+ 77″7088	+ 78″1199
27	+ 15″1249	+ 15″5326	+ 77″9268	+ 78″3345

1802. Le Jour.	Declinaison Moyenne.	Declinaison Apparente ☊ Moyen.	Declinaison Apparente ☊ Vrai.
Sept. 9	98°06 10"3805	98°05'99"4715	98°05'99"3659
11	10"7078	98°06'01"6508	98°06'01"5086
14	11"1988	04"8972	04"6968
16	11"5261	07"1622	06"9234
17	11"6897	08"3330	08"0695
19	12"0170	10"7190	10"4191
20	12"1807	11"9197	11"6031
21	12"3443	13"1162	12"7830
23	12"6716	15"4823	15"1188
29	13"6536	22"4694	22"0384
Octobre 5	14"6355	29"7906	29"3085
8	15"1264	33"4164	32"9139
11	15"6174	36"9015	36"3807
13	15"9447	39"2709	38"7682
15	16"2720	41"7149	41"1725
21	17"2539	48"9871	48"4397
24	17"7449	52"4183	51"8781
Dec. 10	25"4366	97"4647	97"6518
11	25"6003	98"1475	98"3509
18	26"7459	98°07'02"1045	98°07'02"4246
20	27"0732	03"0386	03"3825
23	27"5642	04'3852	04"7655
24	27"7278	04"8324	05"2232
25	27"8915	05"2667	05"6640
26	28"1369	05"8457	06"2568
27	28"3006	06"2274	06"6351

§. 36.

Soit ABC (voyez la Figure 29) un triangle sphérique quelconque, dont AB soit un côté constant, tandis que le côté BC avec l'angle A intercepté par AB et AC change continuellement de valeur; Alors Cosin. BC sera = Cosin. AB. Cosin. AC + Sin. AB. Sin. AC. Co-

sin. A, et Cosin. (BC + ΔBC) = Cosin. AB. Cosin. (AC + ΔAC) + Sin. AB. Sin. (AC + ΔAC) Cosin. (A + ΔA) = Cosin. AB. Cosin. (AC + ΔAC) + Sin. AB. Sin. AC. Cosin. ΔAC. Cosin. (A + ΔA) + Sin. AB. Cosin. AC. Sin. ΔAC. Cosin. (A + ΔA) = Cosin. AB. Cosin. (AC + ΔAC) + Sin. AB. Sin. AC. Cosin. (A + ΔA) — 2Sin. AB. Sin. AC. Sin. $(\frac{1}{2}\ \Delta AC)^2$. Cosin. (A + ΔA) + 2Sin. AB. Cosin. AC. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. (A + ΔA) = Cosin. AB. Cosin. (AC + ΔAC) + Sin. AB. Sin. AC. Cosin. (A + ΔA) + 2Sin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC). Cosin. (A + ΔA), et par conséquent Cosin. BC — Cosin. (BC + ΔBC) = Cosin. AB. (Cosin. AC — Cosin. (AC + ΔAC)) + Sin. AB. Sin. AC. (Cosin. A — Cosin. (A + ΔA)) — 2Sin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC). Cosin. (A + ΔA) = 2Cosin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Sin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC) + 2 Sin. AB. Sin. AC. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔA. Sin. (A + $\frac{1}{2}$ ΔA) — 2 Sin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. (A + ΔA). Cosin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC) Faisant donc, BC = D, ΔBC = ΔD = u, et 2 Cosin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Sin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC) + 2 Sin. AB. Sin. AC. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔA. Sin. (A + $\frac{1}{2}$ ΔA) — 2 Sin. AB. Sin. $\frac{1}{2}$ ΔAC. Cosin. (A + ΔA). Cosin. (AC + $\frac{1}{2}$ ΔAC) = x Sin. D, on aura Cosin. D — Cosin. (D + u) = x Sin. D; et par conséquent les différentiations successives donneront les équations suivantes; savoir du Sin. (D + u) = dx Sin. D, d^2u Sin. (D + u) + du^2 Cosin. (D + u) = o, et d^3u Sin. (D + u) + $3dud^2u$ Cosin. (D + u) — du^3 Sin. (D + u) = o. Multipliant cette dernière par du^2, et substituant dxdu Sin. D au lieu de du^2Sin. (D + u), et — dud^2u Sin. (D + u) c'est à dire — dxd^2u Sin. D au lieu de du^3 Cosin. (D + u), il en résultera $dxdud^3u$ Sin. D — $3dxd^2u^2$ Sin. D — $dxdu^4$ Sin. D = o,

et en divisant par dx Sin. D, $dud^3u - 3d^2u^2 - du^4 = 0$; de sorte qu'en continuant de différentier $dud^4u - 5d^2ud^3u - 4du^3d^2u$ deviendra $= 0$, et $dud^5u - 4d^2ud^4u - 5d^3u^2 - 12du^2d^2u^2 - 4du^3d^3u = 0$, &c. Donc en supposant que U soit la valeur de u, et $\left(\frac{d^nU}{dx^n}\right)$ la valeur de $\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)$ lorsqu' on y fait $x = 0$, il s'ensuivra que U sera $= 0$, $\left(\frac{dU}{dx}\right) = 1$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) = -$ Cotang. D, $\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right) = 1 + 3\text{Cotang. D}^2$, $\left(\frac{d^4U}{dx^4}\right) = -5\text{Cotang. D} - 15\text{Cotang. D}^3 - 4\text{Cotang. D} = -9\text{Cotang. D} - 15\text{Cotang. D}^3$, et $\left(\frac{d^5U}{dx^5}\right) = 36\text{Cotang. D}^2 + 60\text{Cotang. D}^4 + 5 + 30\text{Cotang. D}^2 + 45\text{Cotang. D}^4 + 4 + 12\text{Cotang. D}^2 + 12\text{Cotang. D}^2 = 9 + 90\text{Cotang. D}^2 + 105\text{Cotang. D}^4$. Or u étant une fonction quelconque de x, sa valeur dévélop-pée dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable sera $= U + x\left(\frac{dU}{dx}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right) + \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4U}{dx^4}\right) + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\left(\frac{d^5U}{dx^5}\right) +$ &c, donc $\triangle$BC sera $= x - \frac{x^2}{1.2}\text{Cotang. D} + \frac{x^3}{1.2.3}(1 + 3\text{Cotang. D}^2) - \frac{x^4}{1.2.3.4}(9\text{Cotang. D} + 15\text{Cotang. D}^3) + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}(9 + 90\text{Cotang. D}^2 + 105\text{Cotang. D}^4) -$ &c; c'est à dire que si l'on a observé la valeur de BC + $\triangle$BC, ou celle qui répond à l'angle A + $\triangle$A, la correction qu'il y faut appliquer pour avoir la valeur qui repond à A sera

$$= - x + \frac{x^2}{1.2} \text{Cotang. D} - \frac{x^3}{1.2.3}(1 + 3\text{Cotang. D}^2) +$$
$$\frac{x^4}{1.2.4}(3\text{Cotang. D} + 5\text{Cotang. D}^3) - \frac{x^5}{1.2.4.5}(3 + 30\text{Cotang.}$$
$$\text{D}^2 + 35\text{Cotang. D}^4) + \&c.$$

§. 37.

La formule générale que nous venons de donner nous servira dans la suite en calculant tant les corrections qu'il faut faire aux observations azimuthales (pour les transporter toutes à un même instant quelconque) que celles qu'il faut faire aux observations des hauteurs prises hors du méridien. Savoir quand il s'agit des distances au zénith, nous supposerons que MPZN (voyez la Figure 30) soit le méridien, Z le zénith, P le pôle, et S l'étoile qu'on a observé; enfin achevant le triangle PZS nous le comparerons au triangle ABC, de sorte que nous substituerons PZ au lieu de AB, PS au lieu de AC, P au lieu de A, et ZS au lieu de BC; de plus, s'il s'agit d'une observation faite dans les environs d'un passage supérieur par le méridien, nous supposerons que l'instant, auquel toutes les observations seront transportées, soit celui du passage même par le méridien, ce qui donnera $P = 0$. Donc (en faisant $h =$ la hauteur du pôle, et $\delta =$ la déclinaison de l'étoile lors de son passage par le méridien) D sera $= h - \delta$, quand le zénith est plus prés du pôle que l'étoile, et $D = \delta - h$, quand il en est plus éloigné, enfin x Sin. $(h \backsim \delta)$ sera $= - 2$ Sin. h. Cosin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 2$Cosin. h. Cosin. δ. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 + 2$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$. Cosin. $\Delta P = - 2$Sin. h. Cosin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$ $+ 2$Cosin. h. Cosin. δ. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 + 2$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta - 4$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 = 2$Sin. $(\delta - h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 2$Cosin. h. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$ (Cosin. δ. $- 2$Sin.

$(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta) = 2$Sin. $(\delta - h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 2$Cosin. h. Cosin. $(\delta + \Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$. Au contraire s'il s'agissoit des observations faites dans les environs d'un passage inférieur, et que l'instant au quel on voudroit transporter toutes les observations seroit celui du passage même par le méridien; alors il faudroit faire $P = 200°$, et $D = 200° - (\delta + h)$, ce qui donneroit x Sin. $(\delta + h) = -2$Sin. h. Cosin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta - 2$Cosin. h. Cosin. δ. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 - 2$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$. Cosin. $\Delta P = -2$Sin. h. Cosin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta - 2$Cosin. h. Cosin. δ. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 - 2$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 4$Cosin. h. Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2 = -2$Sin. $(\delta + h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta - 2$Cosin. h. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$ (Cosin. $\delta - 2$Sin. $(\delta + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta$) $= -2$Sin. $(\delta + h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta - 2$ Cosin. h. Cosin. $(\delta + \Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$. Donc en faisant $k = 2$Cosec. $(h \backsim \delta)$. Sin. $(\delta - h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$ Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 2$Cosec. $(h \backsim \delta)$. Cosin. h. Cosin. $(\delta + \Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$, et $K = 2$Cosec. $(\delta + h)$. Sin. $(\delta + h + \frac{1}{2}\Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta\delta + 2$Cosec. $(\delta + h)$. Cosin. h. Cosin. $(\delta + \Delta\delta)$. Sin. $\frac{1}{2}\Delta P^2$, la correction pour la passage supérieur sera $= -k + \frac{k^2}{2} +$ Cotang. $(h \backsim \delta) - \frac{k^3}{6}(1 + 3$Cotang. $(h \backsim \delta)^2) + \frac{k^4}{8}(3$Cotang. $(h \backsim \delta) + 5$Cotang. $(h \backsim \delta)^3) - \frac{k^5}{40}(3 + 30$Cotang. $(h \backsim \delta)^2 + 35$Cotang. $(h \backsim \delta)^4)$ + &c., et celle pour le passage inférieur $= + K - \frac{K^2}{1.2}$ Cotang. $(h + \delta) + \frac{K^3}{6}(1 + 3$Cotang. $(h + \delta)^2) - \frac{K^4}{8}(3$Cotang. $(h + \delta) + 5$Cotang. $(h + \delta)^3) + \frac{K^5}{40}(3 + 30$Cotang. $(\delta + h)^2 + 35$Cotang. $(\delta + h)^4)$ &c.

Dans le cas, où il s'agit d'avoir les corrections, qu'il faut faire aux observations d'une étoile fixe, on en peut regarder la déclinaison comme invariable pendant tout le tems des observations faites dans un jour; c'est à dire qu'on peut faire $\Delta\delta = 0$; d'ou il résultera que k sera $= 2\text{Cosin. h. Cosin. } \delta. \text{ Cosec. } (h \backsim \delta). \text{ Sin. } \frac{1}{2} \Delta P^2$, et $K = 2\text{Cosin. h. Cosin. } \delta. \text{ Cosec. } (h + \delta). \text{ Sin. } \frac{1}{2} \Delta P^2$; Au reste la forme des suites que nous avons trouvé pour le cas le plus général n'en changera en aucune manière.

§. 38.

Quand il s'agit des observations de l'azimuth, nous supposerons que F (voyez la Figure 30) soit l'objet terrestre dont on ait observé la distance FS à l'étoile placée en S pour tous les instants marqués sur la pendule par $m_1, m_2, m_3, m_4 \dots m_{2r}$, et que l'instant du milieu de ceuxci soit marqué par m_0, ensorte que m_0 soit $= \frac{1}{2r} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \dots + m_{2r})$. De plus soient D et P les valeurs respectives de FS et de l'angle SPF correspondantes à m_0, alors il est évident, que, si les accroissements de FS eussent eté proportionels au tems, 2rD seroit égal à la somme de tous les FS observés immédiatement. Or celleci étant marquée par les divisions de l'instrument, supposons qu'elle soit représentée par A_r, alors D seroit $= \frac{A_r}{2r}$. En effêt il ne s'en faut pas beaucoup, que les accroissements de FS ne soient pas uniformes, et par conséquent $\frac{A_r}{2r}$ s'écartera trés peu de la vraie valeur. Donc, en se proposant de transporter toutes les observations à celle, qui auroit eu lieu pour l'instant de m_0, la valeur qu'il faut adopter préalablement pour D (ou celle qui nous servira à calculer les réductions à faire)

sera $= \frac{A_r}{2r}$. Puis connoissant les trois cotés FZ, ZS et FS dans le triangle sphérique FZS on déterminera l'angle FZS; le quel étant ajouté à MZS donnera la valeur approchée de l'angle FZM, ou de l'azimuth du point F. Ensuite, résolvant le triangle sphérique PZF, dont on connoit les deux cotés PZ et ZF avec l'angle compris PZF, on en déduira les valeurs approchées de PF et de l'angle ZPF, enfin otant de celuici l'angle horaire correspondant à chaque instant m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 .... m_{2r}, on aura les valeurs correspondantes de l'angle FPS, dont les différences à $(FPS)_0$ formeront la suite des ΔP. Or le triangle FPS étant comparé à ABC, on sera $FP = AB = \varphi$, $PS = AC$, $P = A$, et $FS = BC = D$. De plus s'il s'agit d'une étoile fixe, sa variation en déclinaison est absolument insensible pendant le tems des observations d'un jour; et dans le cas actuel (ou nous avons supposé que l'instant, au quel toutes les observations doivent être transportées, soit celui du milieu, ensorte que $m_0 = \frac{1}{2r}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 .... + m_{2r})$) on la peut négliger même quand il s'agit du Soleil, puisque la correction qui en résultera dans le sens positif sera tout à fait détruite par celle qui aura lieu en sens négatif, tant que le tems, pendant le quel on ait observé, ne soit que tout au plus d'un quart d'heure. Ainsi nous n'aurons égard dans la suite qu'à la variation de l'angle horaire, d'où la valeur de x déterminée pour le triangle FPS sera $= 2\text{Sin.}\ \varphi.\ \text{Cosin.}\ \delta.\ \text{Cosec.}\ D.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\Delta P.\ \text{Sin.}\ (P + \frac{1}{2}\Delta P)$, et au reste la valeur de la correction à faire telle que nous l'avons trouvé cidessus pour le cas général.

§. 39.

En calculant les réfractions nous avons parti de l'équation suivante $\text{Sin.}\ (z - n\rho) = (1 - \alpha)\ \text{Sin.}\ z$, dans la quelle

quelle z est la distance apparente au zénith, ϱ la réfraction moyenne qui y répond, (c'est à dire celle qui a lieu à la température de 10 dégrés du thermomètre centigrade au dessus du point de congélation, et lorsque le baromètre est à 75.17474 centimètres de hauteur) $n = 5.9807$, et $\alpha = 0.0016513$; ensuite cherchant la réfraction d'aprés la distance apparente au zénith, on fera $n\varrho = u$, de sorte que $\text{Sin.}\ (z - u) = (1 - \alpha)\ \text{Sin.}\ z$; puis on différentiera cette équation par rapport à du et $d\alpha$, ce qui donnera $du\ \text{Cosin.}\ (z - u) = d\alpha\ \text{Sin.}\ z$, $d^2u\ \text{Cosin.}\ (z - u) + du^2\ \text{Sin.}\ (z - u) = 0$, et $d^3u\ \text{Cosin.}\ (z - u) + 3du\, d^2u\ \text{Sin.}\ (z - u) - du^3\ \text{Cosin.}\ (z - u) = 0$; multipliant cette dernière équation par du, et substituant $- d^2u\ \text{Cosin.}\ (z - u)$ au lieu de $du^2\ \text{Sin.}\ (z - u)$, on aura $dud^3u\ \text{Cosin.}\ (z - u) - 3d^2u^2\ \text{Cosin.}\ (z - u) - du^4\ \text{Cosin.}\ (z - u) = 0$, c'est à dire, en divisant par $\text{Cosin.}\ (z - u)$, $dud^3u - 3d^2u^2 - du^4 = 0$; enfin continuant de différentier, il s'ensuivra, que $dud^4u - 5d^2ud^3u - 4du^3d^2u$ sera $= 0$, et $dud^5u - 4d^2ud^4u - 5d^3u^2 - 4du^3d^3u - 12du^2.\ d^2u^2 = 0$. Donc $U = 0$, $\frac{dU}{d\alpha} = \text{Tang.}\ z$, $\frac{d^2U}{d\alpha^2} = -\text{Tang.}\ z^3$, $\frac{d^3U}{d\alpha^3} = \text{Tang.}\ z^3\ (1 + 3\text{Tang.}\ z^2)$, $\frac{d^4U}{d\alpha^4} = -3\text{Tang.}\ z^5\ (3 + 5\text{Tang.}\ z^2)$, et $\frac{d^5U}{d\alpha^5} = 3\text{Tang.}\ z^5\ (3 + 30\ \text{Tang.}\ z^2 + 35\text{Tang.}\ z^4)$, et par conséquent ϱ sera $= \frac{\alpha}{n}\ \text{Tang.}\ z - \frac{\alpha}{n} . \frac{\alpha}{2}\ \text{Tang.}\ z^3 + \frac{\alpha}{n} . \frac{\alpha^2}{2.3}\ \text{Tang.}\ z^3 (1 + 3\text{Tang.}\ z^2) - \frac{\alpha}{n} . \frac{\alpha^3}{2.4}\ \text{Tang.}\ z^5\ (3 + 5\text{Tang}\ z^2) + \frac{\alpha}{n} . \frac{\alpha^4}{2.4.5}\ \text{Tang.}\ z^5\ (3 + 30\text{Tang.}\ z^2 + 35\text{Tang.}\ z^4)$, c'est à dire, qu'en substituant au lieu de n et α les valeurs, que nous avons rapporté ci — dessus, et ordonnant la suite précédente par rapport aux puissances de Tang. z, ϱ ou la réfraction moyenne sera $= 175''7736.\ \text{Tang.}\ z - 0''1450476\ \text{Tang.}\ z^3$

$+ 0''00023935$. Tang. z^5 — &c., desorte que la réfraction qui répond à la température de zéro dégré du thermomètre centigrade, et à 76 centimètres de hauteur du Baromètre soit $= 185''4495$ Tang. $z - 0''1530321$ Tang. $z^3 + 0''00025253$ Tang. z^5. Enfin ayant calculé les réfractions moyennes d'aprés cette formule, nous en avons déduit les réfractions vraies, en multipliant celle la par $\left(1 - \frac{4\theta}{1000}\right)$ $\left(\frac{b}{76}\right) \cdot \left(\frac{5412}{5412 + \theta}\right)$; savoir b étant la hauteur du baromètre exprimée en centimètres, et θ le nombre de dégrés du thermomètre centigrade.

§. 40.

Enfin, si h ou la hauteur du pôle, et δ ou la déclinaison d'une étoile étoient données, et qu'il s'agissoit de trouver la correction à faire aux passages de cette étoile par le méridien, observés par le moyen d'un instrument de passage, dont l'axe de vision fasse (du côté de l'orient) avec l'axe de mouvement un angle $= 100° - \pi$, et dont l'azimuth du point de son intersection avec l'horizon soit $= \alpha$, enfin dont le plan du petit cercle, que décrit l'axe de vision, fasse avec l'horizon (du coté de l'orient) un angle $= 100° - \varepsilon$. Pour cela nous supposerons que HM soit l'horizon (voyez la Figure 31), HPZM le méridien, P le pôle, Z le zénith, umSα le petit cercle que décrit l'axe de vision, et z$\sigma\pi\varepsilon$ le grand cercle qu'il décriroit étant perpendiculaire à l'axe de mouvement, de plus que Sn et $\alpha\pi$ soient perpendiculaires à z$\sigma\pi\varepsilon$. Alors Sin. $\alpha\varepsilon =$ Sin. $\alpha\pi$. Cosec. $\alpha\varepsilon\pi$, et delà $\alpha\varepsilon = \pi$, et ME $= \alpha - \pi$; ensuite Tang. Mz $=$ Tang. Mεz. Sin. Mε; c'est à dire Cotang. Zz $= \frac{\alpha - \pi}{\varepsilon}$, Sin. Zz $= \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\alpha - \pi)^2 + \varepsilon^2}}$,

Cosin. $Zz = \frac{\alpha - \pi}{\sqrt{(\alpha - \pi)^2 + \varepsilon^2}}$. De plus Cosin. $Mz\varepsilon$ $=$ Sin. $M\varepsilon z$. Cosin. $M\varepsilon$, c'est à dire $1 - \frac{1}{2}$ Sin. $(Mz\varepsilon)^2$ $=$ Cosin. $(\alpha - \pi)$. Cosin. $\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 + (\alpha - \pi)^2\right)$ et delà Sin. $Mz\varepsilon = \sqrt{(\alpha - \pi)^2 + \varepsilon^2}$, enfin Sin. Pz $=$ Sin. (PZ — Zz) $=$ Sin. PZ. Cosin. Zz — Cosin. PZ. Sin. $Zz = \frac{(\alpha - \pi) \text{ Cosin. h} - \varepsilon \text{ Sin. h}}{\sqrt{(\alpha - \pi)^2 + \varepsilon^2}}$, Cosin. Pz $=$ $\frac{(\alpha - \pi) \text{ Sin. h} + \varepsilon\text{Cosin. h}}{\sqrt{(\alpha - \pi)^2 + \varepsilon^2}}$, Sin. $zP\sigma$ $=$ Tang. $Mz\varepsilon$. Cosin. Pz. Cosin. $zP\sigma \mp$ Tang. $Mz\varepsilon$. Sin. Pz. Cotang. PS (selon qu'il s'agit du passage supérieur ou de l'inférieur); donc $zP\sigma$ (quand il s'agit du passage supérieur, et $HP\sigma^1$ quand il s'agit de l'inférieur, est) $= (\alpha - \pi)$ Sin. h $+ \varepsilon$Cosin. h $\mp (\alpha - \pi)$ Cosin. h. Tang. $\delta \pm \varepsilon$Sin. h. Tang. δ. $=$ Sec. $\delta \left((\alpha - \pi)\right.$. Sin. h. Cosin. $\delta \mp (\alpha - \pi)$ Cosin. h. Sin. $\delta + \varepsilon$Cosin. h. Cosin $\delta \pm \varepsilon$Sin. h. Sin. $\left.\delta\right) =$ Sec. $\delta\left((\alpha - \pi)\right.$ Sin. (h $\mp \delta) + \varepsilon$Cosin. $\left.(h \mp \delta)\right)$. Or Sin. $z\sigma P =$ Sin. $Mz\varepsilon$. Sin. Pz. Cosec. PS $=$ Sec. $\delta\left((\alpha - \pi)\right.$ Cosin. h $-$ εSin. $\left.h\right)$, $S\sigma n = 100° - z\sigma P$, Cosec. $S\sigma n =$ Sec. $z\sigma P$ $= 1$, Sin. $S\sigma$ $=$ Sin. Sn. Cosec. $S\sigma n$ $=$ Sin. π; donc $S\sigma = \pi$, $SP\sigma = \pi$ Sec. δ, zPS $=$ Sec. $\delta\left(\alpha\right.$ Sin. $(h - \delta) + \varepsilon$Cosin. $(h - \delta) + \left.(1 - \text{Sin.}(h - \delta))\right)$ et HPS $=$ Sec. δ. $\left(\alpha\right.$ Sin. $(h + \delta) + \varepsilon$Cosin. $(h + \delta)$ — $\left.\pi\,(1 + \text{Sin. }(h + \delta))\right)$, d'où il s'ensuit, que la correction à faire sera $=$ Sec. $\delta\left(\alpha\right.$ Sin. $(h - \delta) + \varepsilon$Cosin. $(h -$ $\delta) + 2\pi$Sin. $\left.(50° - \frac{1}{2}(h - \delta))^2\right)$ pour le passage su-

périeur, et $= \text{Sec.}\ \delta \left(\alpha\ \text{Sin.}\ (h + \delta) + \varepsilon \text{Cosin}\ (h + \delta) - 2\pi \text{Sin.}\ (50^\circ + \frac{1}{2}(h + \delta))^2\right)$ pour le passage inférieur; c'est à dire qu'en faisant ε et $\pi = 0$, les corrections dont il s'agit seront $= \alpha\ \text{Sec.}\ \delta.\ \text{Sin.}\ (h - \delta)$, et $= \alpha\ \text{Sec.}\ \delta.\ \text{Sin.}\ (h + \delta)$; par conséquent, si l'on a observé deux étoiles dont δ_0 et δ_1 soient les déclinaisons, et qu'on suppose $A_{0.1}$ égal à la différence d'ascension droite moins l'arc qui répond à l'intervalle de temps qui s'écoule depuis l'observation de la premiére jusqu' à celle de la séconde; alors $A_{0.1}$ sera $= \text{Sec.}\ \delta_0.\ \text{Sec.}\ \delta_1.\ \text{Cosin. h. Sin.}\ (\delta_0 - \delta_1)\ \alpha = \alpha \left(\text{Sec.}\ \delta_1.\ \text{Sin.}\ (h - \delta_1) - \text{Sec.}\ \delta_0.\ \text{Sin.}\ (h - \delta_0)\right)$. Or en ayant observé à Mallörn les passages de différentes étoiles par le vertical d'une mire placée prés du meridien, nous en avons déduit l'azimuth d'aprés cette formule, de sorte qu'il est devenu $= 5735''864$ *) ce qui ne différe que de $11''7$ ($0''253$ du tems sidéral) de ce qui suit des répétitions de l'angle compris entre le soleil et le centre du signal de Seskar Furö.

§. 41.

Les formules que nous venons de rapporter, nous servirons dans la suite en calculant les réductions à faire aux observations astronomiques. Or avant que de venir au détail de ces observations, il faut que je fasse mention ho-

---

*) L'azimuth du mire déduit des observations du passage de la polaire par son vertical devient $= 123''993$ du tems sidéral, et celui qui résulte de la comparaison du passage des autres étoiles $= 124''255$; enfin les observations des hauteurs correspondantes du soleil et de la γ du Pegase le font $= 123''438$, desorte qu'en prenant le milieu, on en obtient la valeur $= 123''895$ du tems sidéral, ce qui fait $5735''864$ en arc d'un grand cercle.

norable de M:r JULIN (jeune homme d'Uleåborg, vif et entreprenant) qui nous accompagna pendant tout notre séjour à Mallörn et à Pahtavara, et qui vouloit s'instruire dans les principes de l'Astronomie et dans le manœuvre des observations. Trés souvent nous l'avons chargé du soin de l'observation des hauteurs correspondantes, surtout à Pahtavara; de sorte qu'en cela nous le pouvons régarder comme ayant été un des coopérateurs. Une autre chose qu'il est de la dernière importance de ne pas oublier, c'est que toutes les observations de tems se faisant à Mallörn immédiatement sur la pendule A placée dans l'observatoire (dont la marche étoit extrèmément irrégulière, à cause des vents cou lis qui dérangerent le balancier) il faut avant tout commencer par les transporter à la pendule B placée dans une chambre adjacente (et dont la marche étoit assez régulière), ce qui se fait au moyen du tableau suivant des comparaisons faites de tems en tems pendant l'intervalle des observations.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES à MALLÖRN.

Comparaisons des pendules A et B.

An. 1802. Octobre	A.	B.	C.
3	$19^h36'$	$19^h42'36''5$	$7''5151$
4	$20^h35'$	$20^h28'30''0$	$6''3725$
4	$23^h59'$	$23^h52'\ 8''33$	$6''9565$
5	$0^h22'$	$0^h15'\ 5''67$	$6''1382$
5	$4^h28'$	$4^h20'40''50$	$6''7252$
5	$12^h32'$	$12^h23'46''25$	$6''0750$
5	$13^h12'$	$13^h\ 3'42''20$	$8''0180$
6	$0^h17'$	$0^h\ 7'13''33$	$8''4753$
6	$12^h25'$	$12^h13'30''50$	$8''9076$
7	$0^h19'$	$0^h\ 5'44''50$	

An. 1802. Octobre	A.	B.	C.
8	$0^{h}55'$	$23^{h}39'55''\ 3$	$7''6154$
8	$1^{h}21'$	$0^{h}\ 5'52''\ 0$	$11''5302$
8	$11^{h}34'$	$10^{h}16'54''\ 2$	$11''9326$
8	$13^{h}\ 3'$	$11^{h}45'36''\ 5$	$11''7568$
8	$14^{h}17'$	$12^{h}59'22''\ 0$	$12''1708$
9	$13^{h}42'$	$12^{h}19'37''\ 0$	$11''2687$
10	$13^{h}\ 5'$	$11^{h}38'13''\ 5$	$11''3920$
11	$10^{h}18'$	$8^{h}47'11''\ 8$	$12''2857$
11	$10^{h}39'$	$9^{h}\ 8'\ 7''\ 5$	$12''1233$
11	$13^{h}\ 5'$	$11^{h}33'38''\ 0$	$13''1757$
11	$14^{h}19'$	$12^{h}47'21''75$	$12''3409$
11	$15^{h}\ 3'$	$13^{h}31'12''70$	$12''2651$
11	$22^{h}13'$	$20^{h}39'44''\ 8$	$13''8000$
11	$23^{h}13'$	$21^{h}39'31''\ 0$	$12''2449$
12	$1^{h}40'$	$0^{h}\ 6'\ 1''\ 0$	$11''9502$
12	$5^{h}41'$	$4^{h}\ 6'13''\ 0$	$13''0580$
12	$13^{h}\ 9'$	$11^{h}32'35''\ 5$	$13''3297$
12	$22^{h}15'$	$20^{h}36'34''\ 2$	$12''2667$
12	$23^{h}\ 0'$	$21^{h}21'25''\ 0$	$12''9936$
13	$1^{h}37'$	$23^{h}57'51''\ 0$	$14''5161$
13	$3^{h}41'$	$2^{h}\ 1'21''\ 0$	$14''0230$
13	$5^{h}\ 8'$	$3^{h}28'\ 0''67$	$14''9272$
13	$13^{h}\ 9'$	$11^{h}27'\ 1''\ 0$	$15''4884$
13	$14^{h}35'$	$12^{h}52'38''\ 8$	$15''4400$
13	$21^{h}50'$	$20^{h}\ 5'43''\ 0$	$14''7000$
13	$23^{h}30'$	$21^{h}45'18''\ 5$	$15''5830$
14	$4^{h}13'$	$2^{h}27'\ 5''\ 0$	$12''7021$
15	$12^{h}33'$	$10^{h}40'14''\ 3$	$9''8571$
15	$13^{h}57'$	$12^{h}\ 4'\ 0''\ 5$	$11''8605$
15	$14^{h}40'$	$12^{h}46'52''\ 0$	$14''0747$
16	$22^{h}49'$	$20^{h}48'19''\ 5$	$15''4054$
17	$0^{h}\ 3'$	$22^{h}\ 2'\ 0''\ 5$	$14''4737$
17	$1^{h}57'$	$23^{h}55'33''\ 0$	$16''2112$
17	$4^{h}38'$	$2^{h}35'49''\ 5$	$15''0000$
17	$5^{h}24'$	$3^{h}21'38''\ 0$	$13''4950$
21	$2^{h}30'$	$0^{h}\ 6'23''\ 0$	$12''2315$

An. 1802. Octobre	A.	B.	C.
21	$12^h52'$	$10^h26'16''2$	$9''7959$
21	$13^h41'$	$11^h15'\ 8''2$	$11''7736$
21	$14^h34'$	$12^h\ 7'57''8$	$13''3258$
22	$2^h20'$	$23^h51'21''0$	$12''6807$
23	$22^h33'$	$19^h55'\ 0''3$	$12''3636$
23	$23^h39'$	$21^h\ 0'46''7$	$12''6857$
24	$2^h34'$	$23^h55'\ 9''7$	$11''6495$
24	$5^h48'$	$3^h\ 8'32''0$	$11''5949$
24	$6^h47'$	$4^h\ 7'20''6$	$11''3504$
24	$11^h24'$	$8^h43'28''2$	$9''8572$
24	$12^h55'$	$10^h14'13''25$	$7''9545$
24	$15^h\ 7'$	$12^h25'55''75$	

Dans le tableau précédent, la colonne A contient l'instant marqué par la pendule A, et la colonne B le même instant marqué par la pendule B, enfin la colonne C contient la correction soustractive qu'il faut faire à une heure comptée sur la pendule A pour avoir le même temps compté sur la pendule B, et qui a lieu pour tout l'intervalle de temps écoulé depuis l'observation correspondante jusqu' à celle qui suit immédiatement.

Passage du Soleil par le Vertical du mire le 5 Octobre $0^h7'37''94$ A $= 0^h0'45''27$ B; d'où le midi vrai $= 0^h2'42''109$ B $= 23^h48'38''309$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= -\ 14'3''8$.

Passage de β de l'Andromède par le vertical du mire le 5 Octobre $12^h24'25''648$ A $= 12^h16'12''664$ B, d'où l'instant de son passage par le méridien $= 12^h17'29''844$ B $= 12^h3'15''75$ du temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen $= -\ 14'14''094$.

Passage de α des Poissons par le vertical du mire le 5 Octobre $13^h16'56''736$ A $= 13^h8'38''277$ B, d'où l'instant de son passage par le méridien $= 13^h10'29''122$ B $= 12^h56'13''43$ du temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la Pendule B pour en avoir le temps moyen $= - 14'15''692$.

Passage de θ de la Baleine par le vertical du mire le 5 Octobre $12^h39'7''54$ A $= 12^h30'53''069$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien $= 12^h32'53''824$ B $= 12^h18'40''162$ du temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen $= - 14'13''662$.

Passage du Soleil par le Vertical du mire le 6 Octobre $0^h10'30''44$ A $= 0^h0'44''642$ B; d'où le midi vrai $0^h2'41''928 = 23^h48'20''603$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 14'21''325$.

Passage du soleil par le vertical du mire le 7 Octobre $0^h13'56''445$ A $= 0^h0'41''696$ B; d'où le midi vrai $= 0^h2'39''23$ B $= 23^h48'3''195$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 14'36''035$.

Passage du soleil par le vertical du mire le 8 Octobre $1^h15'46''64$ A $= 0^h0'39''303$ B; d'où le midi vrai $0^h2'37''185$ B $= 23^h47'46''183$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 14'51''002$.

Passage de α du Pegase par le vertical du mire le 8 Octobre $11^h18'23''404$ A $= 10^h1'20''606$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien $= 10^h3'0''16$ B $= 9^h48'0''89$ du temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen $= - 14'59''27$.

Passa-

Passage de γ du Pegase par le vertical du mire le 8 Octobre $12^h26'36''168$ A $= 11^h9'19''906$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien devient $11^h10'59''517$ B $= 10^h55'58''969$ du temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la pendule B pour en avoir le temps moyen $= - 15'0''548$.

Passage de β de la Baleine par le Vertical du mire le 8 Octobre $12^h56'41''896$ A $= 11^h39'19''649$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien devient $= 11^h41'29''804$ B $= 11^h26'29''195$ du temps moyen, et par conséquent la correction pour la pendule B $= - 15'0''609$.

Passage de θ de la Baleine par le vertical du mire le 8 Octobre $13^h37'22''373$ A $= 12^h19'52''134$ B, et delà l'instant de son passage par le méridien $= 12^h21'52''889$ B $= 12^h6'52''192$ du temps moyen, de sorte que la correction pour la pendule B soit $= - 15'0''697$.

Passage de γ du Pegase par le vertical du mire le 11 Octobre $12^h29'33''068$ A $= 10^h58'18''23$ B; Donc l'instant de son passage par le méridien $= 10^h59'57''842$ B $= 10^h44'11''307$ du temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B $= - 15'46''535$.

Passage de la Polaire par le vertical du mire le 11 Octobre $13^h47'22''$ A $= 12^h15'50''696$ B.

Passage de α de l'Andromède par le vertical du mire le 11 Octobre $12^h24'53''6$ A $= 10^h53'39''704$ B; Donc l'instant de son passage par le méridien $= 10^h55'4''937$ B $= 10^h39'19''565$ du temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B $= - 15'45''372$.

S

Passage du Soleil par le vertical du mire le 12 Octobre $1^h34'34''66$ A = $0^h0'36''766$ B; d'où le midi vrai $0^h2'36''03$ B = $23^h46'42''739$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B = — $15'53''291$.

Passage du Soleil par le vertical du mire le 13 Octobre $1^h39'44''498$ A = $0^h0'34''825$ B, d'où le midi vrai $0^h2'34''43$ B = $23^h46'28''115$ temps moyen, et la correction pour la pendule B = — $16'6''315$.

Passage de β de la Baleine par le vertical du mire le 13 Octobre $13^h2'51''894$ A = $11^h20'54''477$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien sera = $11^h23'4'632$ B = $11^h6'49''735$ du temps moyen, et par conséquent la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen sera = — $16'14''897$.

Passage de la Polaire par le vertical du mire le 13 Octobre $13^h52'19''$ A = $12^h10'8''817$. B.

Passage de γ du Belier par le vertical du mire le 13 Octobre $14^h12'36''73$ A = $12^h30'21''31$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien sera = $12^h31'56''814$ B = $12^h15'41''540$ du temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B = — $16'15''274$.

Passage de β du Bélier par le vertical du mire le 13 Octobre $14^h13'41''1$ A = $12^h31'25''4$ B, d'où l'instant de son passage par le méridien sera = $12^h32'59''39$ B = $12^h16'43''678$ temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B = — $16'15''712$.

Passage du Soleil par le vertical du mire le 14 Octobre $1^h45'49''96$ A = $0^h0'33''182$ B; d'où le midi vrai = $0^h2'33''126$ B = $23^h46'14''$ temps moyen, et la correction pour la pendule B = — $16'19''126$.

Passage de γ du Pegase par le vertical du mire le 15 Octobre $12^h36'15''168$ A $= 10^h43'28''941$ B, d'où l'instant de son passage par le méridien $= 10^h45'8''552$ B $= 10^h28'27''613$ du temps moyen, et delà la correction pour la pendule B $= - 16'40''939$.

Passage de la Polaire par le vertical du mire le 15 Octobre $13^h54'22''28$ A $= 12^h1'22''8$ B.

Passage du soleil par le vertical du mire le 17 Octobre $14^h2'3''342$ A $= 0^h0'34''975$ B, d'où le midi vrai $= 0^h2'35''942$ B $= 23^h45'34''655$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 17'1''287$.

Passage du soleil par le vertical du mire le 21 Octobre $14^h24'23''752$ A $= 0^h0'47''894$ B, d'où le midi vrai $= 0^h2'50''202$ B $= 23^h44'50''784$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 17'59''418$.

Passage de β de la Baleine par le vertical du mire le 21 Octobre $13^h17'9''203$ A $= 10^h51'21''296$ B, d'où l'instant de son passage par le méridien $= 10^h53'31''451$ B $= 10^h35'22''51$ du temps moyen, et la correction à faire pour la pendule B $= - 18'8''941$.

Passage de γ du Bélier par le vertical du mire le 21 Octobre $14^h26'48''393$ A $= 12^h0'47''604$ B; Donc l'instant de son passage par le méridien $= 12^h2'23''108$ B $= 11^h44'14''383$ du temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B $= - 18'8''725$.

Passage du Soleil par le vertical du mire le 22 Octobre $2^h29'34''812$ A $= 0^h0'53''532$ B, d'où le midi vrai $= 0^h2'56''166$ B $= 23^h44'41''562$ temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 18'14''604$.

Passage du soleil par le vertical du mire le 24 Octobre $2^h39'58''832$ A $= 0^h1'6''895$ B; d'où le midi vrai

$= 0^h 3' 10'' 282$ B $= 23^h 44' 25'' 125$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 18' 45'' 157$.

Passage de ζ du Pegase par le vertical du mire le 24 Octobre $11^h 19' 31'' 452$ A $= 8^h 39' 0'' 398$ B; Donc l'instant de son passage par le méridien sera $= 8^h 40' 44'' 007$ B $= 8^h 21' 51'' 261$ temps moyen, et la correction qu'il faut faire à la pendule B $= - 18' 52'' 746$.

Passage de α du Pegase par le vertical du mire le 24 Octobre $11^h 42' 54'' 858$ A $= 9^h 2' 19'' 951$ B, de sorte que l'instant de son passage par le méridien étoit $= 9^h 3' 59'' 505$ B $= 8^h 45' 6'' 411$ du temps moyen, et par conséquent la correction pour la pendule B $= - 18' 53'' 094$.

Passage de α de l'Andromède par le vertical du mire le 24 Octobre $12^h 46' 27'' 5$ A $= 10^h 5' 42'' 159$ B; Donc l'instant du passage par le méridien étoit $= 10^h 7' 7'' 392$ B $= 9^h 48' 12'' 622$ temps moyen, et par conséquent la correction à faire pour la pendule B $= - 18' 54'' 77$.

Passage de γ du Pegase par le vertical du mire le 24 Octobre $12^h 51' 5'' 72$ A $= 10^h 10' 19'' 612$ B; d'où l'instant de son passage par le méridien $= 10^h 11' 59'' 223$ B $= 9^h 53' 4'' 589$ du temps moyen, et delà la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen $= - 18' 54'' 634$.

Passage de β de la Baleine par le vertical du mire le 24 Octobre $= 13^h 21' 9'' 733$ A $= 10^h 40' 19'' 515$ B; Donc l'instant de son passage par le méridien étoit $= 10^h 42' 29'' 67$ A $= 10^h 23' 34'' 847$ du temps moyen, et la correction pour la pendule B $= - 18' 54'' 823$.

Passage de la Polaire par le vertical du mire le 24 Octobre $14^h 8' 37''$ A $= 11^h 27' 40'' 5$.

Observations des Hauteurs Correspondantes.

Le midi vrai du 5 Octobre, conclu de l'observation de 4 hauteurs correspondantes = $0^h 2' 1'' 306$ B; ce qui étant comparé avec l'observation du Passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $121'' 543$ du côté de l'orient.

Le Passage de γ du Pegase par le méridien le 11 Octobre conclu de 8 observations de hauteurs correspondantes = $10^h 59' 56'' 897$ B, ce qui étant comparé avec l'observation du passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $123'' 039$.

Le midi vrai du 12 Octobre conclù de 28 hauteurs correspondantes = $0^h 2' 36'' 37$ B, ce qui étant comparé avec le passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $124'' 255$.

Le midi vrai du 13 Octobre conclù de 36 hauteurs correspondantes = $0^h 2' 35'' 162$ B, ce qui étant comparé avec le passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $124'' 66$.

Le midi vrai du 14 Octobre conclù de 35 hauteurs correspondantes = $0^h 2' 29' 56$ B, ce qui étant comparé avec le passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $120'' 213$.

Le midi vrai du 17 Octobre conclù de 24 hauteurs correspondantes = $0^h 2' 36'' 43$ B, ce qui étant comparé avec le passage par le vertical du mire fait l'azimuth de celuici = $124'' 4$.

Multiplications des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 5 Octobre, la pendule B

étant = $12^h 12' 5''075$ lors du passage par le méridien, le Thermometre = + $6^\circ 3$, le Barometre = $0^m 735424$, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9421811, la réfraction moyenne = $77''70902$, et la refraction vraie = $73''21596$.

	A	B	b	C
1	$12^h 14' 49''$			
2	$12^h 29' 0''$			
3	$12^h 40' 32''$			
4	$12^h 50' 44''$	$101^\circ 028$	$283''693$	$100^\circ 9997307$
5	$12^h 56' 55''$			
6	$13^h 4' 10''$	$151^\circ 5875$	$928''370$	$151^\circ 4946630$

Remarque. Dans le tableau précédent, ainsi que dans tous ceux qui suivront, la colonne A contient les instants des observations marqués sur la pendule A, la colonne B n fois la distance au zénith telle qu'on l'a observé immédiatement, la colonne b la somme de toutes les corrections à faire depuis la première inclusivement (savoir celles qui sont duês au mouvement diurne, et) qu'il faut appliquer à la colonne B, pour avoir le multiple de la distance au zénith, qui auroit eû lieu, si toutes les observations eussent eté faites dans le moment même du passage par le méridien, et qu'on voit dans la colonne C.

Multiplications des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 8 Octobre, la pendule B étant = $12^h 1' 4''254$ lors du passage par le méridien, le Thermomètre = + 4°8, le Baromètre = 73.77991 centimètres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9512879, la réfraction moyenne = $77''74487$, et la réfraction vraie = $73''95778$.

	A	B	b	
7	$12^h 11' 8''$			
8	$22' 55''$			
9	$27' 12''$			
10	$32' 24''$			

	A	B	b	
11	12^h 36′50″			
12	42′ 0″	303°393	3961″510	302°9968490
13	49′18″			
14	53′40″			
15	13^h 1′30″			
16	6′42″			
17	18′20″			
18	25′50″	454°926	4346″590	454°4913410
19	34′20″			
20	38′30″			
21	45′ 7″			
22	50′20″			
23	56′46″			
24	14^h 2′20″	606°53875	5479″010	605°9908490

Multiplications des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 11 Octobre, la pendule B étant = 11^{h}50′2″463 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = + 2°7833, le Baromètre = 74.10649 centimètres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.963701, la réfraction moyenne = 77″73759, et la réfraction vraie = 74″91582.

25	12′25′25″			
26	31′40″	657°155	6581″729	656°4968271
27	41′30″			
28	51′ 0″			
29	57′25″			
30	13^h 2′15″	758°218	7265″280	757°4914720
31	9′55″			
32	20′ 0″			
33	28′18″			
34	33′38″			
35	43′10″			
36	48′18″			
37	58′42″			
38	14^h 4′25″			
39	11′16″			
40	17′18″	1010°906	9296″920	1009°9763070

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 13 Octobre, la pendule B étant = 11h42'39'203 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = + 3°6, le Baromètre = 74.87846 centimêtres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9704096, la réfraction moyenne = 77''77682, et la réfraction vraie = 75''47540.

41	13h24'50''			
42	29'20''			
43	42' 0''			
44	45'25''			
45	49'20''			
46	54'30''			
47	57'30''			
48	14h 0'54''	1213°000	1°0206''646	1211°9793354
49	8'30''			
50	15' 4''			
51	19'44''			
52	24'36''			
53	28'10''			
54	32' 8''	1364°884	1°4050''587	1363°47894l3

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 15 Octobre, la pendule B étant 11h35'13''8 lors du passage par le méridien, le Thermométre = + 5°2, le Baromètre = 75.38318 centimêtres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9703203, la réfraction moyenne = 77''73847, et la réfraction vraie = 75''43123.

1	12h52'47''			
2	57'20''			
3	13h 1'54''			
4	4'53''	101°068	675''877	101°0004123
5	13' 5''			
6	16'40''			
7	20'40''			
8	23'42''			

9	13h26′38″			
10	28′44″			
11	31′35″			
12	34′54″			
13	39′30″			
14	45′45″			
15	51′48″			
16	54′42″	404°121	1109″632	404°0100368
17	14h 0′16″			
18	3′18″			
19	6′46″			
20	10′10″			
21	14′31″			
22	18′26″			
23	22′14″			
24	24′20″			
25	28′50″			
26	33′ 8″	657°1015	5858″491	656°5156509

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 21 Octobre, la pendule B étant 11h13′5″29 lors du passage par le méridien, le Thermomêtre = + 6°0, le Barometre = 74.93784 centimêtres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9612938, la réfraction moyenne = 77″72032, et la réfraction vraie = 74″71207.

27	13h 0′27″			
28	2′58″			
29	6′27″			
30	8′30″			
31	11′30″			
32	13′36″			
33	16′47″			
34	18′38″			
35	22′35″			
36	25′36″	909°760	7337″312	909°0262688
37	31′44″			

38	13h 33′ 40″			
39	36′ 7″			
40	39′ 8″			
41	48′ 10″			
42	51′ 55″			
43	54′ 16″			
44	56′ 40″			
45	14h 0′ 10″			
46	3′ 24″	1162°3083	7718″461	1161°5364539
47	6′ 0″			
48	13′ 9″			
49	18′ 14″			
50	20′ 43″			
51	23′ 0″			
52	25′ 50″			
53	28′ 6″			
54	31′ 20″	1364°6025	1°0566″051	1363°5458949

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 24 Octobre, la pendule B étant 11h2′3″329 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = + 6°0, le Baromètre = 76.30356 centimètres, le coëfficient pour la réfraction moyenne = 0.9788134, la réfraction moyenne = 77″80252, et la réfraction vraie = 76″15415.

1	12h 29′ 34″			
2	32′ 56″			
3	36′ 2″			
4	38′ 23″			
5	41′ 36″			
6	44′ 30″	152d019	5111″328	151°5078672
7	49′ 7″			
8	51′ 55″			
9	54′ 52″			
10	57′ 47″			
11	13h 1′ 5″			
12	3′ 54″			
13	10′ 45″			

14	13h16′23″			
15	19′45″			
16	22′35″	404°838	8224″294	404°0155706
17	26′40″			
18	32′55″			
19	38′ 0″			
20	41′ 8″			
21	43′30″			
22	45′55″			
23	47′53″			
24	54′ 0″			
25	57′45″			
26	14h 1′10″			
27	6′10″			
28	8′37″	707°905	8678″188	707°0371812
29	13′35″			
30	18′25″			
31	24′32″			
32	28′22″			
33	32′50″			
34	36′22″			
35	40′ 6″			
36	43′33″			
37	48′43″			
38	51′29″			
39	55′46″			
40	58′42″	1011°6725	1°6214″026	1010°0510974

I.ere Tableau des observations des distances du Pole au zénith de Mallörn.

1	108°7773	108°7773	108°7773	27°19′43″250
2	163°1610	271°9383	380°7156	
3	326°3278	598°2661	978°9817	
4	489°4869	1087°7530	2066°7347	
5	652°6511	1740°4041	3807°1388	
6	707°0448	2447°4489	6254°5877	
7	815°8148	3263°2637	9517°8514	
8	1087°7382	4351°0019	13868°8533	
9	1305°2906	5656°2925	19525°1458	
10	1468°4522	7124°7447	26649°8905	35″434

1	108°7741	108°7741	108°7741	
2	435°1049	543°8790	652°6531	
3	707°0447	1250°9237	1903°5768	
4	978°9816	2229°9053	4133°4821	
5	1250°9181	3480°8234	7614°3055	
6	1468°4685	4949°2919	12563°5974	38″729
1	163°1618	163°1618	163°1618	
2	435°0928	598°2546	761°4164	
3	761°4224	1359°6770	2121°0934	
4	1087°7442	2447°4212	4568°5146	36″176

Remarque. La distance du pôle au zénith qui résulte des observations précédentes est = 27°19′36″78. Or l'observation 8ème dans la première suite, et la seconde dans la troisieme suite ayant été marquées comme douteuses, il vaudroit mieux les éliminer; ce qui étant fait, il en résulteroit le tableau suivant.

2:de Tableau des observations des distances du Pole au zénith de Mallörn.

1	108°7773	108°7773	108°7773	27°19′43″250
2	163°1610	271°9383	380°7156	35″000
3	326°3278	598°2661	978°9817	38″711
4	489°4869	1087°7530	2066°7347	37″341
5	652°6511	1740°4041	3817°1388	37″565
6	707°0448	2447°4489	6254°5877	39″069
7	815°8148	3263°2637	9517°8514	38″697
8	1033°3672	4296°6309	13814°4823	38″730
9	1196°5288	5493°1597	19307°6420	38″569
1	108°7741	108°7741	108°7741	35″250
2	435°1049	543°8790	652°6531	40″563
3	707°0447	1250°9237	1903°5768	40″544
4	978°9816	2229°9053	4133°4821	39″166
5	1250°9181	3480°8234	7614°3055	39″071
6	1468°4685	4949°2919	12563°5974	38″729
1	163°1618	163°1618	163°1618	36″333
2	489°4914	652°6532	815°8150	39″667
3	815°8132	1468°4664	2284°2814	37″857

Remarque. De ce tableau il s'ensuit que la distance du pole au zénith du cercle répétiteur à Mallörn est = 27°19′38″484, et par conséquent la latitude de celuici = 72°80′61″516. Or le centre du signal étoit 1m.93 encore plus vers le midi; donc la latitude du centre du signal

étoit = 72°80'61"377 en partant de la déclinaison que nous avons supposé au commencement de cette section pour l'epoque du 1:er Janvier 1800. Or quant à celleci, nous avons trouvé qu'il faut la diminuer de 5"005 (comme nous le verrons en traitant des observations de Pahtavara); donc la latitude du centre du signal à Mallörn étoit = 72°80' 56"372 (= 65°31'30"265 selon la division sexagésimale).

Multiplications de l'angle supplémental compris entre le soleil et le centre du signal de Seskar Furö le 24 Octobre avant midi, le Thermomètre étant = + 6°0, le Baromètre = 75.57617 centimètres, la pendule B au midi vrai = 0^h3'10"282 et la distance du signal de Seskar Furö au zènith = 100°0315.

10^h 37'41"5	em	
40'54"0	im	
42'37"0	em	
44' 4"0	im	
45'28"3	em	
47'19"0	im	620°615
50' 4"0	em	
51'15"0	im	
52'53"5	em	
54'34"0	im	
56' 8"2	em	
57'26"0	im	1224°897
59'27"2	em	
11^h 1'46"0	im	
3'17"0	em	
4'32"0	im	
5'55"7	em	
6'56"8	im	1813°988
10'22"6	em	
12' c"0	im	
13'36"0	em	
15'17"0	im	
16'47"3	em	
18'36"0	im	2386°547
24' 3"5	im	
26'22"8	em	
30'10"0	im	
32'29"5	em	2570°314

Tableau des observations de l'azimuth de Seskar Furö le 24 Octobre.

963°7323	963°7323	963°7323	160°62'20"5
1927°4668	2891°1991	3854°9314	22"3
2891°2117	5782°4108	9637°3422	28"3
3854°9410	9637°3518	19274°6940	26"6
4176°1733	13813°5251	33088°2191	23"0

Multiplications de l'angle compris entre le soleil et un point de HalsöGrund le 24 Octobre aprés de midi, le Thermomètre étant = + *8°o, et le Baromètre* = $0^{m}7600667$.

5h59'35"5	em	
6h 2'51"0	im	
6'36"2	em	
9' 1"6	im	
13'26"0	em	
16'16"5	im	861°208
20'57"8	em	
23'13"5	im	
25'19"5	em	
27'23"5	im	
30'31"6	em	
32'27"5	im	1694°271
36'23"0 }	im	
38'56"0 }	em	
41'22"0 }	im	
43'45"2 }	em	1965°167

Rem. L'azimuth de HalsöGrund qui résulte de ces observations est = 200°73'69"5.

Multiplications de l'angle compris entre HalsöGrund et Seskar Furö.

1	80°238	80°238	80°238
2	160°476	240°714	320°952
3	240°717	481°431	802°383
4	320°956	802°387	1604°770
5	401°197	1203°584	2808°354
6	481°438	1685°022	4493°376
7	561°673	2246°695	6740°071
8	641°914	2888°609	9628°680

Donc l'angle compris entre HalsöGrund et Seskar Furö est = 40°11'97"1, lequel étant ôté de l'azimuth de Halsö

Grund, donnera 160°61'72''4 pour l'azimuth de Seskar Furö tel qu'il résulte des observations aprés méridiennes. Or les observations avant méridiennes nous ont donné 160° 62'23' 0; donc en prénant le milieu, l'azimuth de Seskar Furö sera = 160°61'97''7 quand on le voit du centre du cercle répétiteur.

Multiplications de l'angle compris entre le mire et Seskar Furö; La distance du mire au zénith étant = 100° 4305, et celle de Seskar Furö = 100°0315.

1	320°080	320°080	320°080
2	640°161	960°241	1280°321
3	960°242	1920°483	3200°804
4	1280°322	3200°805	6401°609

Donc l'angle observé étoit = 160°04'03''; à quoi ajoutant 23''8 pour la réduction à l'horizon, et 38''1 pour l' excentricité de la lunette inférieure, on aura la valeur de l'angle horizontal compris entre le mire et Seskar Furö (et vu du centre du repétiteur) = 160°04'64''9.

Remarque. L'azimuth du mire vû de l'instrument de passage étant = 5735''9, 8''6 est la correction additive qu'il y faut faire pour avoir son azimuth vû du répétiteur, lequel sera par conséquent = 5744''5; et delà l'azimuth de Seskar Furö = 160°04'64''9 + 57'44''5 = 160°62'09''4, ce qui ne diffère que de 11''7 (0''253 du tems sidéral) de ce que nous vénons de trouver par les multiplications sur le soleil; de sorte qu'en prenant le milieu, l'azimuth de Seskar Furö vû du centre du Répétiteur devient = 160° 62'03'6, et en ôtant 190''8 (pour la réduction au centre du signal) le même azimuth vû du centre du signal = 160°60'12''8.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES à PAHTAVARA.

Multiplication des distances de la Polare au zénith dans son passage supérieur le 10 Decembre 1802, la pendule B étant = 7h33'43''771 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = — 9°3, le Baromètre = 71.761 centimètres et la réfraction = 70''27422.

	A	B	b	C
1	6h46' 3''			
2	51'30''	46°990	804''2893	46°9095''7107
3	56'36''			
4	7h 3'25''	93°935	1260''5795	93°8089''4205
5	8'45''			
6	12'50''	140°860	1471''4988	140°7128''5012
7	17' 9''			
8	19'40''	187°783	1565''5699	187°6264''4301
9	32'10''			
10	35'12''	234°691	1566''4920	234°5343''5080

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 11 Decembre, la pendule B étant = 7h30'0''795 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = — 20°, le Baromètre = 72.714 centimêtres et la réfraction = 74''34888.

11	6h34'20''			
12	38'15''	281°709	2710''4098	281°43795902
13	43'26''			
14	46'14''	328°695	3520''5667	328°34294333
15	52'44''			
16	55' 5''	375°657	4038''7647	375°25312353
17	59'40''			
18	7h 2'20''	422°605	4374''0475	422°16759525
19	15'45''			
20	20' 6''	469°516	4434''0898	469°07259102
21	26'20''			
22	30'50''	516°425	4436''9207	515°98130793
23	36'40''			
24	40'45''	563°341	4468''6757	562°89413243
25	46' 0''			
26	51'50''	607°260	4614''2191	606°79857809
27	59'20''			

28	8h 3′35″	657°205	5008″8826	656°70411174
29	11′37″			
30	14′20″	704°188	5741″8978	703°61381022
31	25′18″			
32	28′ 0″	751°224	7011″5761	750°52284239
33	40′20″			
34	42′40″	798°336	9025″9953	797°43340047

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 18 Decembre, la pendule B étant = 7h3′58″1674 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = — 21°, le Baromètre = 73.008 centimêtres, et la réfraction = 74″94217.

35	6h 4′56″			
36	8′54″	845°380	10314″7860	844°34852140
37	12′56″			
38	17′10″	892°379	11264″5690	891°25254310
39	24′15″			
40	27′45″	939°341	11837″9859	938°15720141
41	35′45″			
42	39′55″	986°279	12111″2397	985°06787603
43	47′20″			
44	52′30″	1033°198	12192″4686	1031°97875314
45	58′55″			
46	7h 3′35″	1080°103	12197″5794	1078°88324206
47	9′16″			
48	12′ 0″	1127°013	12215″9975	1125°79140025
49	18′ 9″			
50	22′10″	1173°921	12321″8659	1172°68881341
51	26′20″			
52	32′ 0″	1220°870	12576″7253	1219°61232747
53	38′39″			
54	42′52″	1267°831	13115″7488	1266°51942512
55	50′ 1″			
56	53′19″	1314°828	14018″2839	1313°42617161
57	8h 1′58″			
58	4′14″	1361°884	15400″8619	1360°34391381
59	10′ 6″			
60	12′44″	1408°968	17195″9516	1407°24840484

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 20 Decembre, la pendule B étant = 6h56′29″9766 lors du passage par le méridien, le

Thermomêtre = — 13°, le Baromêtre = 71.761 centimêtres, et la réfraction = 71''34237.

61	6h 0'40''			
62	5'13''	1455°990	18333''1639	1454°15668361
63	9' 0''			
64	13'45''	1502°981	19143''5555	1501°06664445
65	20'56''			
66	26'10''	1549°930	19577''4467	1547°97225533
67	30'40''			
68	35'55''	1596°859	19794''3263	1594°87956737
69	40'35''			
70	46'30''	1643°780	19864''6065	1641°79353935
71	52'45''			
72	55'25''	1690°689	19867''6379	1688°70223621
73	58'30''			
74	7h 2'10''	1737°598	19874''8255	1735°61051745

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 23 Decembre, la pendule B étant = 6h45'21''2305 lors du passage par le méridien, le Thermomêtre = — 13°83, le Baromêtre = 73cm.231 et la réfraction = 73''10965.

1	5h53'27''			
2	6h 1' 8''	47°005	920''8606	46°91291394
3	6'12''			
4	9'35''	93°965	1478''9887	93°81710113
5	12'21''			
6	14'42''	140°920	1881''8939	140°73181061
7	17'45''			
8	20'46''	187°858	2153''4553	187°64265447
9	25' 5''			
10	27'36''	234°786	2297''8430	234°55621570
11	31' 5''			
12	35'10''	281°704	2358''0007	281°46819993
13	41' 0''			
14	43'35''	328°611	2362''3967	328°37476033
15	49'40''			
16	52'55''	375°523	2377''4790	375°28525210
17	57' 4''			
18	59'45''	422°441	2445''9989	422°19640011
19	7h11'35''			
20	14' 5''	469°374	2746''7038	469°09932962
21	20'25''			

22	7h22'40''	516°338	3267''0490	516°01129510
23	26'43''			
24	29' 0''	563°317	3984''0149	562°91859851
25	32' 9''			
26	34' 6''	610°316	4888''5331	609°82714669
27	37' 2''			
28	39'31''	657°345	5997''5805	656°74524195
29	43'55''			
30	46'13''	704°391	7407''1767	703°65028233
31	50'40''			
32	53'35''	751°471	9166''7143	750°55432857
33	56'52''			
34	59' 0''	798°585	11241''8229	797°46081771
35	8h 2'38''			
36	4'36''	845°740	13650''3753	844°37496247

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 24 Decembre, la pendule B étant = 6h41'40''2828 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = — 9°75, le Baromètre = 73cm.31, et la réfraction = 71''95775.

37	5h50'54''			
38	55'15''	892°739	14587''6902	891°28023098
39	59'46''			
40	6h 3'15''	939°712	15228''7026	938°18912974
41	7'35''			
42	10' 9''	986°667	15656''7234	9851°0132766
43	13'16''			
44	16'33''	1033°608	15942''4334	1032°01375666
45	19'57''			
46	26'45''	1080°530	16080''5224	1078°92194776
47	31'34''			
48	33'24''	1127°447	16114''4497	1125°83555503
49	36' 8''			
50	40'30''	1174°358	16120''8258	1172°74591742
51	45'40''			
52	48' 0''	1221°264	16131''9717	1219°65080283
53	55'46''			
54	58'55''	1268°183	16230''6391	1266°55993609
55	7h 6'10''			
56	9'38''	1315°120	16505''2464	1313°46947536
57	13'35''			
58	17'20''	1362°076	16959''9265	1360°38000735
59	22'25''			
60	24'28''	1409°056	17652''3249	1407°29076751

61	7h29'30"			
62	32' 7"	1456°064	18609"2994	1454°20307006
63	34'45"			
64	36'52"	1503°085	19769"3705	1501°10806295
65	41' 8"			
66	43'45"	1550°135	21229"0310	1548°01209690

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage supérieur le 25 Decembre, la pendule B étant = 6h37'58"867 lors du passage par le méridien, le Thermomêtre = — 11°7, le Barométre = 73cm.204 et la réfraction = 72"45301.

67	5h41'56"			
68	45'35"	1597°161	22393"5805	1594°92164195
69	49'32"			
70	52' 8"	1644°161	23275"0030	1641°83349970
71	55'45"			
72	57'59"	1691°138	23945"9751	1688°74340249
73	6h 7'13"			
74	12'25"	1738°079	24263"8370	1735°65261630
75	17'30"			
76	24' 0"	1785°903	24386"1260	1782°56438740
77	32'10"			
78	37'30"	1831°912	24392"8993	1829°47271007
79	42' 0"			
80	48'30"	1878°821	24418"1271	1876°37918729
81	54'39"			
82	56'51"	1925°741	24544"1848	1923°28658152
83	7h 1'30"			
84	7'23"	1972°681	24825"8639	1970°19841361
85	12' 5"			
86	16'10"	2019°647	25346"0619	2017°11239381
87	19'14"			
88	22'15"	2066°628	26071"9945	2064°02080055
89	25'20"			
90	28'40"	2113°635	27024"8885	2110°93251115
91	31'54"			
92	35'17"	2160°664	28249"1902	2157°83908098
93	39' 6"			
94	42'21"	2207°728	29804"7110	2204°74752890
95	46' 2"			
96	48'29"	2254°829	31697"1259	2251°65928741

Remarque. Les observations précédentes ayant été rangées comme nous l'avons fait pour celles de Mallörn, il en a résulté que la latitude du cercle répétiteur étoit = 74°60'85''056. Or le centre du signal étant plus méridional de 3m.292, il en faut oter 0''328 de sorte que la latitude du centre du signal étoit = 74°60'84''728 en partant de la déclinaison que nous avons adopté préalablement pour l'époque du 1:er Janvier 1800. Enfin celleci devant être diminuée de 5''005 (comme nous le verrons bientot), il faut encore retrancher cette quantité de la détermination précédente. Donc la latitude du centre du signal de Pahtavara étoit effectivement = 74°60'79''723 (67°8'49'830 selon la division sexagésimale); et par conséquent l'amplitude de l'arc du méridien compris entre les centres des signaux de Mallörn et de Pahtavara = 1°80'23''351 (= 1° 37'19''566 selon la division sexagésimale). Or celuici étoit = 180827.68 mètres = 92777.981 toises = 609050.33 pieds de Suède (comme nous le verrons dans la section suivante); donc le dégré décimal à 73°70'68''047 de latitude est = 100329.667 mètres = 51476.543 toises = 337922.87 piéds de Suède (et par conséquent le dégré sexagésimal à 66° 20'10''047 de latitude = 111477.408 mètres = 57196.159 toises = 375469.86 piéds de Suède) *).

---

*) Dans l'évaluation précédente de l'arc du méridien, nous avons supposé, que la barre de fer qui nous est venue de la part de l'Institut National de France (et dont nous nous sommes toujours servi en déterminant les distances itinéraires) soit en toute rigueur égale au double Mètre à la température de la glace fondante. Or si elle ne le seroit effectivement que lorsque le Thermomètre centigrade est à 16.25 au dessus du point de congélation (comme l'est la Toise de Perou, à la quelle on a comparé le Mètre en le faisant = 443.2959 lignes = 0.513074 toises) alors la distance des parallèles de Mallörn et de Pahtavara seroit = 180794.06 Mètres = 92760.731 toises = 608937.09 piéds de Suède; d'où le dégré décimal à 73°70' 68''047 de latitude seroit = 100311.013 Mètres = 51466.972 toises = 337860.04 piéds de Suède (et par conséquent le dégré sexagesimal à 66°20'10''067 de latitude = 111456.68 Mètres = 57185.524 toises = 375400.04 piéds de Suède).

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage inférieur le 26 Decembre, la pendule B étant = 18h32'25"784 lors du passage par le méridien, le Thermomêtre = — 20°4, le Baromêtre = 73cm.661, et la réfraction = 88"98893.

1	17h 6' 5"			
2	9'17"	2452"3222	54°379	54°62423222
3	13'59"			
4	17'57"	4452"7803	108°810	109°25527803
5	23' 0"			
6	27'37"	5997"7706	163°274	163°87377706
7	32'45"			
8	35'40"	7161"2763	217°786	218°50212763
9	42'43"			
10	45'17"	7967"4928	272°333	273°12974928
11	50'20"			
12	53' 0"	8539"3753	326°899	327°75293753
13	56'30"			
14	18h 0'40"	8934"9786	381°482	382°37549786
15	23'30"			
16	27'35"	8952"2524	436°115	437°01022524
17	32'30"			
18	34'20"	8952"8776	490°740	491°63528776
19	37'50"			
20	40'30"	8969"1271	545°367	546°26391271
21	47'20"			
22	50'10"	9061"5571	599°990	600°89615571
23	54' 0"			
24	57' 5"	9246"2914	654°600	655°52462914
25	19h 1'55"			
26	4'35"	9573"7472	709°185	710°14237472
27	8'45"			
28	11'25"	10061"9463	763°770	764°77619463
29	16'55"			
30	19'29"	10782"3482	818°322	819°40023482
31	24' 2"			
32	26'12"	11735"7423	872°853	874°02657423
33	30' 3"			
34	32'20"	12920"6103	927°354	928°64606103
35	36'35"			
36	51'45"	14700"9145	981°806	983°27609145
37	54'44"			
38	56'58"	17077"3876	1036°190	1037°89773876
39	20h 0'20"			
40	2'31"	19778"6405	1090°549	1092°52686405

41	20h 6'29''			
42	8'35''	22858''8049	1144°870	1147°15588049
43	11'38''			
44	13'35''	26271''9492	1199°157	1201°78419492
45	17'20''			
46	19'30''	30086''3901	1253°410	1256°41863901
47	25' 5''			
48	26'50''	34453''3008	1307°595	1311°04033008

Multiplication des distances de la Polaire au zénith dans son passage inférieur le 27 Decembre, la pendule B étant = 18h28'43''795 lors du passage par le méridien, le Thermomètre = — 27°5, le Baromètre = 73cm.453, et la réfraction = 91''2973.

1	17h40' 3''			
2	43'15''	762''3578	54°545	54°62123578
3	47'25''			
4	49'55''	1314''7424	109°117	109°24847424
5	53'40''			
6	56' 0''	1710''4906	163°705	163°87604906
7	59'25''			
8	18h 1'55''	1982''0927	218°297	218°49520927
9	6'55''			
10	9' 8''	2130''1362	272°912	273°12501362
11	13' 8''			
12	16'50''	2196''4057	327°530	327°74964057
13	18'48''			
14	20'40''	2224''5896	382°150	382°37745896
15	26'20''			
16	28'20''	2225''6062	436°773	436°99556062
17	33' 0''			
18	36' 0''	2237''8519	491°401	491°62478519
19	50'25''			
20	52'30''	2416''0900	546°010	546°25160900
21	56'15''			
22	58' 0''	2693''8604	600°610	600°87938604
23	19h 1'43''			
24	5'45''	3116''7315	655°186	655°49767315
25	14'30''			
26	17'20''	3882''3519	709°740	710°12823519
27	21'45''			
28	24'15''	4893''7646	764°260	764°74937646
29	27'45''			
30	30'27''	6144''1422	818°759	819°37341422

31	19h34′ 0″			
32	35′40″	7641″3770	873°236	874°00013770
33	38′45″			
34	42′13″	9404″4241	927°683	928°62344241
35	47′54″			
36	49′20″	11585″2319	982°100	983°25852319
37	53′44″			
38	55′20″	14097″8304	1036°470	1037°87978304
39	58′15″			
40	20h 0′39″	16903″6648	1090°818	1092°50836684

Remarque. La latitude du cercle répétiteur à Pahtavara que nous avons déduit des observations précédentes du passage inférieur est = 74°60′75″045. Or le passage supérieur nous avoit donné 74°60′85″056, dont la moitié de la différence avec le résultat précédent (ou 5″005) est la correction soustractive qu'il faut faire à la déclinaison (98°07′06″635) adopté préalablement pour l'époque du passage inférieur par le méridien le 28 Decembre 1802 avant midi, ensorte que celleci n'étoit effectivement que 98°07′01″63. D'où il s'ensuit que la déclinaison moyenne pour l'époque du 1:er Janvier 1800 étoit = 98°04′44″069. Or cet élément ayant été observé à différentes époques, et par les plus célèbres Astronomes, nous croyons ſaire un plaisir aux lecteurs en rapportant ici les déterminations qui semblent mériter le plus de confiance.

1:o t étant un nombre quelconques d'années écoulées depuis le commencement de 1800, la variation de la Polaire en déclinaison causée par la précession des équinoxes jointe à la diminution de l'obliquité de l'écliptique est = 59″9753 t — 0″0066607 t^2.

2:o La déclinaison moyenne pour le 1:er Janvier 1796 déterminée par Delambre *) est = 98°02′06″670, ce qui étant trans-

*) La déclinaison rapporté par Delambre luimème est = 98° 02′07″719, et j'en ai retranché (de même que de toutes celles qui suivront) la constante de l'aberration = 1″049, puisqu'on a toujours négligé auparavant d'y avoir égard.

transporté à l'époque du 1:er Janvier 1800 donnera 98°04'46''678.

3:o La même pour le commencement de 1786 par Maskelyne = 97°96'02''809, ce qui étant transporté de même à l'époque du premier Janvier 1800 fera 98°04'43''749.

4:o La même pour le 1:er Janvier 1794 par le comte De Brühl = 98°00'81''914, ce qui fait 98°04'42''006 pour le commencement de 1800.

5:o La même pour le 1:er Janvier 1795 par Le Duc de Marlborough = 98°01'41'636 ce qui donne 98°04'43''178 pour le commencement de 1800.

6:o La même pour le 1:er Janvier 1795 par Piazzi = 98°01'41''574, ce qui donne pour l'époque du commencement de 1800 = 98°04'43'116.

Prenant le milieu des déterminations précédentes, il en résulte 98°04'43''725 pour la valeur de la déclinaison moyenne à l'époque du 1:er Janvier 1800; ce qui ne diffère que de 0''344 de celle qui résulte de nos observations. Enfin la discrépance même que nous venons de voir, pourroit bien s'expliquer par le défaut des formules de réductions qu'on emploit communement dans ces sortes de calcul. Par exemple les tables des aberrations et nutations supposent ordinairement les coëfficients respectives à ces deux phénomènes = 61''7284 et = 27''7778 au lieu de 62''5 et 29''6296 qu'ils sont effectivement; de plus on néglige tout à fait les termes de la nutation dont les arguments sont les lieux du soleil et de la lune, et en calculant celui même qui dépend du lieu du noeud ascendant de la lune on prend toujours le nœud moyen au lieu du nœud vrai. Or tous ces effets réunis suffisent à mon avis pour expliquer les discrépances de 2 ou 3 secondes, qui ont encore lieu entre les déterminations les mieux accréditées; de sorte qu'en faisant de nouveau le calcul de ces observations, il pourroit bien arriver qu'en effet on les trouveroit mieux d'accord qu'elles ne semblent l'être d'abord.

2. Remarque. Dans tout ce qui précède nous avons calculé les réfractions d'aprés la règle de Bradley, et en supposant que, pour chaque dégré d'accroissement dans la température de l'air atmosphérique, son volume augmente d'un 250:eme de ce qu'il est à la température de zéro. Or cette supposition étant moins vraisemblable, lorsqu'il s'agit des températures extrêmes, telles que 30 dégrés au dessus ou au dessous de la glace fondante, nous les avons calculé de même conformément aux expériences de Prony rapportées dans le Journal de l'Ecole Polytechnique; ce qui nous a donné 98°04'45''363 pour la déclinaison moyenne de la Polaire à l'époque du 1:er Janvier 1800, 72°80'58''824 (65°31'31''060 selon la division sexagésimale) pour la latitude du centre du signal à Mallörn, et 74°60'84''611 (= 67°8'51''414 sexagés) pour celle du centre du signal à Pahtavara; ensorte que l'amplitude de l'arc du méridien compris entre les centres des signaux de Mallörn et de Pahtavara deviendroit dans cette hypothèse = 1°80'25''787 (= 1°37'20''360 Sexagés.) Or celuici étant en distance itinéraire = 180827.68 Mètres = 92777.981 toises = 609050.23 piéds de Suède, il en résulteroit que le Degré décimal à 73°70'71''717 de latitude seroit = 100316.108 mètres = 51469.586 toises = 337877.19 piéds de Suède (et par conséquent le dégré sexagésimal à 66°20'11''237 de latitude = 111462.336 mètres = 57188.429 toises = 375419.10 piéds de Suède) *).

*) Nous venons de voir, qu'en supposant l'étalon, qui nous a été envoyé de la part de l'institut National de France, précisement égal au double Mètre à la température de + 16°.25 du thermomètre centigrade, alors la distance des parallèles de Mallörn et de Pahtavara seroit = 180794.06 Mètres = 92760.731 toises = 608937.09 piéds de Suède; de sorte qu'étant à 73°70'71''717 de latitude, la valeur du dégré décimal seroit conformément à cet hypothése, et en calculant les réfractions d'après les experiences de Prony = 100297.457 Mètres = 51460.017 toises = 337814.37 piéds de Suède (c'est à dire que le dégré sexagésimal seroit à 66°20'11''237 de latitude = 111441.619 Mètres = 57177.797 Toises = 375349.3 piéds de Suède).

Multiplication des distances du bord supérieur du soleil au zénith le 23 Decembre, la pendule B étant = $11^h57'$ $43'074$ au midi vrai, le Thermomètre = − 13°2, le Baromètre = $73^{cm}156$, et le coëfficient pour la réfraction moyenne = 1.011974.

1	$11^h44'46''$			
2	$46'16''$	199°422	652''63	199°356737
3	$49'26''$			
4	$52'18''$	398°821	862''76	398°734724
5	$56'\ 6''$			
6	$58'49''$	598°176	871''12	598°088888
7	$0^h\ 2'20''$			
8	$5'15''$	797°579	1041''56	797°474844
9	$8'55''$			
10	$10'25''$	996°993	1667''57	996°826243

La distance du bord supérieur du soleil au zénith dans son passage par le méridien auroit été = 100°38'25'' en fésant abstraction de toute réfraction; à quoi ajoutant 1'66''757 on aura 100°39'92'' = la distance qu'on auroit observé sans celle-la. Or l'observation ayant donné cette distance = 99°69'93'', il en résulte que la différence, ou 69'99'' est la réfraction qui avoit lieu à 0°30'07'' de hauteur apparente.

Multiplication des distances du bord supérieur du soleil au zénith le 5 Janv. 1803, la pendule B étant = $0^h7'$ $26''896$ au midi vrai, le Thermomètre = — 29° et le Baromètre = $74^{cm}344$.

1	$11^h44'40''$			
2	$48'\ 5''$	198°074	1960''57	197°877943
3	$54'22''$			
4	$56'56''$	396°027	2578''63	395°769137
5	$0^h\ 1'25''$			
6	$3'47''$	593°930	2687''94	593°661206
7	$12'56''$			
8	$15'52''$	791°845	2909''48	791°554052
9	$20'55''$			
10	$24'20''$	989°834	3932''89	989°440711

La distance du bord supérieur du soleil au zénith dans le midi auroit été = 99°54′13″ s'il n'-y-avoit point eû de réfraction; donc en y ajoutant 3′93″289 il s'ensuit que 99°58′06″ est la distance qu'on auroit dû observer immédiatement sans celle-la. Mais l'observation nous l'a donné = 98°98′34″, de sorte que la différence ou 59′72″ est la réfraction qui avoit lieu à 1°01′66″ de hauteur apparente.

IV:me Section

Théorie du Sphéroïde.

§. 42.

Soit L (voyez la Figure 32) un point quelconque de la surface de la terre, dont PLQpE soit le méridien, P le póle, Pp le petit axe, EQ le diamètre de l'equateur, λ un autre point pris dans le méridien de L, $L\omega O$ perpendiculaire à la surface en L, et $\lambda\theta\Theta$ la perpendiculaire en λ, enfin LU perpendiculaire à EQ. De plus soit CQ le démi diamétre de l'équateur $= a$, l'excentricité du méridien $= e$, $CU = x$, $UL = y$, $L\omega Q$ ou la latitude du point $L = \lambda$, et $\lambda\theta Q$ ou la latitude du point $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$. Alors l'équation à l'Ellipse séra celleci: $y^2 = (1 - e^2).(a^2 - x^2)$, et delà $ydy = -(1 - e^2)$ xdx, $\omega U = -\frac{ydy}{dx} = (1 - e^2)\, x$, Cosin. λ^2: Sin. λ^2 $= \omega U^2 : LU^2 = (1 - e^2)^2 x^2 : (1 - e^2)(a^2 - x^2) = (1 - e^2)\, x^2 : a^2 - x^2$, Cosin. $\lambda^2 : (1 - e^2)$ Sin. $\lambda^2 = x^2 : a^2 - x^2$, Cosin. $\lambda^2 : 1 - e^2$ Sin. $\lambda^2 = x^2 : a^2$,

$$x = \frac{a \text{Cosin.}\, \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin.}\, \lambda^2}},\ \omega U = \frac{a(1 - e^2) \text{ Cosin.}\, \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin.}\, \lambda^2}},\ C\omega =$$

$$\frac{e^2\, a \text{Cosin.}\, \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin.}\, \lambda^2}} = e^2 a \text{ Cosin.}\, \lambda + \tfrac{1}{2}\, e^4 a \text{ Sin.}\, \lambda^2.$$

Cosin. λ, $\omega\theta = e^2 a\, \Delta\lambda$ Sin. $\lambda + \frac{1}{2}\, e^4 a\, \Delta\lambda$ Sin. $\lambda^3 - e^4 a\, \Delta\lambda$ Sin. λ Cosin. $\lambda^2 + \frac{1}{2}\, e^2 a\, \Delta\lambda^2$ Cosin. λ,

$\theta e = \omega\theta \dfrac{\text{Sin.}\,\lambda}{\Delta\lambda} = e^2 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{1}{2} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^4 - e^4 a$ $\text{Sin.}\,\lambda^2 \text{ Cosin.}\,\lambda^2 + \frac{1}{2} e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda$, $\omega e = \epsilon\theta + e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda$, $L\omega = a - e^2 a + \frac{1}{2} e^2 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 - \frac{1}{2} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{3}{8} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^4 = \dfrac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin.}\,\lambda^2}}$, $Le = a - e^2 a + \frac{3}{2} e^2 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{7}{8} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^4 - e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 \text{ Cosin.}\,\lambda^2 - \frac{1}{2} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{3}{2} e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda = a - e^2 a + \frac{3}{2} e^2 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 - \frac{3}{2} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{15}{8} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^4 + \frac{3}{2} e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin}\,\lambda = \dfrac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin.}\lambda^2)^3}} + \frac{3}{2} e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda$, $Oe = \dfrac{a e^2 \text{ Cosin.}\,\lambda^2}{\sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.}\lambda^2)^3}} - \frac{3}{2} e^2 a\, \Delta\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda \text{ Sin.}\,\lambda$, $O\lambda\theta : LO\lambda = \text{Sin. } O\lambda\theta : \text{Sin. } LO\lambda = Oe : e\lambda = Oe : Le = e^2 \text{ Cosin.}\,\lambda^2 + e^4 \text{ Cosin.}\,\lambda^2 - \frac{3}{2} e^2\, \Delta\lambda \text{ Sin.}\,\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda : 1$, et par conséquent $O\lambda\theta = e^2\, LO\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda^2 + e^4 .\, LO\lambda \text{ Cosin.}\,\lambda^2 - \frac{3}{2} e^2 .\, (LO\lambda)^2 \text{ Sin.}\,\lambda .\, \text{Cosin.}\,\lambda$, enfin LO est $= CU.\ \text{Sec.}\,\lambda = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin.}\,\lambda^2}} = a + \frac{1}{2} e^2 a \text{ Sin.}\,\lambda^2 + \frac{3}{8} e^4 a \text{ Sin.}\,\lambda^4 + \frac{5}{16} e^6 a \text{ Sin.}\,\lambda^6$.

§. 43.

De plus soit M (voyez la Figure 33) un point quelconque pris hors du méridien de L; Alors, joignant MO on formera un triangle sphérique, dont POL, POM, et MOL seront les côtés; de sorte, qu'en faisant MOL $= x$, l'azimuth du point M vû de L et compté du nord = PLM = l'angle que font les plans

POL et MOL $= \alpha$, et POM $=$ u, il en résultera Cosin. u $=$ Cosin. α. Cosin. λ. Sin. x $+$ Sin. λ. Cosin. x, et delà du Sin. u $=$ dx Sin. λ. Sin. x $-$ dx Cosin. α. Cosin. λ. Cosin. x, d^2u Sin. u $+$ du^2 Cosin. u $=$ dx^2 Sin. λ. Cosin. x $+$ dx^2 Cosin. α. Cosin. λ. Sin. x $=$ dx^2 Cosin. u, c'est à dire d^2u $+$ du^2 Cotang. u $=$ dx^2 Cotang. u, enfin d^3u $+$ $2dud^2u$ Cotang. u $-$ du^3 Cosec. u^2 $= -$ dx^2du Cosec. u^2. Donc U $= 100^\circ - \lambda$, $\frac{dU}{dx} = -$ Cosin. α, $\frac{d^2U}{dx^2} =$ Tang. λ. Sin. α^2, $\frac{d^3U}{dx^3} =$ Cosin. α. Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. $\lambda^2)$, et u $= 100^\circ - \lambda -$ xCosin. α $+ \frac{1}{2}$ x^2 Tang. λ. Sin. α^2 $+ \frac{1}{6}$ x^3 Cosin. α. Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. $\lambda^2) =$ POM $=$ POλ (en supposant que λ soit le point où le parallèle de M traverse le méridien de L), par conséquent LOλ $=$ $\frac{L\lambda}{LO} = \frac{LM}{LO}$ Cosin. $\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{LM}{LO}\right)^2$ Tang. λ Sin. α^2 $-$ $\frac{1}{6}\left(\frac{LM}{LO}\right)^3$ Cosin. α. Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. $\lambda^2)$ et delà Lλ $=$ LM Cosin. $\alpha - \frac{1}{2}$ LM $\left(\frac{LM}{LO}\right)$ Tang. λ Sin. $\alpha^2 - \frac{1}{6}$ LM $\left(\frac{LM}{LO}\right)^2$ Cosin. α. Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. $\lambda^2)$. Mais $\frac{LM}{a}$ étant désigné par A, $\frac{LM}{LO}$ sera $=$A $-$ $\frac{1}{2}$ e^2A Sin. λ^2 $- \frac{1}{8}$ e^4 A Sin. λ^4, $\left(\frac{LM}{LO}\right)^2 = A^2$ $-$ e^2 A^2 Sin. λ^2, et $\left(\frac{LM}{LO}\right)^3 = A^3$, donc L$\lambda$ ou la distance des parallèles de L et M sera $=$ LM Cosin. α $- \frac{1}{2}$ LM. A Sin. α^2 Tang. λ $+ \frac{1}{4}$ e^2 LM. A Sin. α^2 Sin. λ^2 Tang. λ $- \frac{1}{6}$ LM. A^2 Sin. α^2 Cosin. α $(1 + 3$

Tang. λ^2), $LO\lambda = A$ Cosin. $\alpha - \frac{1}{2} e^2 A$ Cosin. α. Sin. $\lambda^2 - \frac{1}{8} e^4 A$ Sin. λ^4 Cosin. $\alpha - \frac{1}{2} A^2$ Tang. λ Sin. $\alpha^2 + \frac{1}{2} e^2 A^2$ Sin. α^2 Sin. λ^2. Tang. $\lambda - \frac{1}{6} A^3$ Cosin. α Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. $\lambda^2)$, $O\lambda\theta = e^2 A$ Cosin. $\alpha - e^2 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^2 - \frac{1}{2} e^4 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^2 + \frac{1}{2} e^4 A$ Cosin. α. Sin. $\lambda^4 - \frac{1}{2} e^2 A^2$ Sin. α^2 Sin. λ Cosin. $\lambda + e^4 A$ Cosin. $\alpha - e^4 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^2 - \frac{3}{2} e^2 A^2$ Sin. λ Cosin. $\lambda + \frac{3}{2} e^2 A^2$ Sin. α^2 Sin. λ. Cosin. $\lambda = e^2 A$ Cosin. $\alpha - e^2 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^2 - \frac{3}{2} e^4 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^2 + e^4 A$ Cosin. $\alpha + \frac{1}{2} e^4 A$ Cosin. α Sin. $\lambda^4 - \frac{3}{2} e^2 A^2$ Sin. λ Cosin. $\lambda + e^2 A^2$ Sin. α^2 Sin. λ Cosin. λ, et delà $Le\,\lambda$ ou $\triangle\lambda$ (c'est à dire la différence en latitude des points L et M) $= A$ Cosin. $\alpha + e^2 A$ Cosin. α $(1 - \frac{3}{2}$ Sin. $\lambda^2) + e^4 A$ Cosin. α $(1 - \frac{3}{2}$ Sin. $\lambda^2 + \frac{3}{8}$ Sin. $\lambda^4) - \frac{1}{2} A^2$ Tang. λ Sin. $\alpha^2 + \frac{1}{2} e^2 A^2$ (Sin. α^2 (Sin. λ^2 Tang. $\lambda + 2$Sin. λ Cosin. λ) $- 3$Sin. λ Cosin. λ) $- \frac{1}{6} A^3$ Cosin. α Sin. α^2 $(1 + 3$ Tang. λ^2.

§. 44.

Au contraire si u étoit $= 200° -$ OLMP $=$ l'angle que font entr'eux les plans POM et LOM, alors Sin. u $=$ Sin. MOL. Cotang. POM. Tang. $\alpha +$ Cosin. MOL. Cosin. u. Tang. α, Sin. u $-$ Cosin. u. Tang. $\alpha =$

$$\frac{\text{Sin. }(u - \alpha)}{\text{Cosin. }\alpha} = \text{Sin. MOL. Cotang. POM. Tang. } \alpha -$$

$(1 -$ Cosin. MOL) Cosin. u Tang. α, Sin. $(u - \alpha)$ $=$ Sin. MOL. Cotang. POM. Sin. α. $- 2$Sin. $(\frac{1}{2}$ MOL$)^2$ Cosin. u Sin. α; Or Cosin. u $=$ Cosin. $(u - \alpha + \alpha)$ $=$ Cosin. α Cosin. $(u - \alpha) -$ Sin. α Sin. $(u - \alpha) =$ Cosin.

Cosin. α — Sin. α Sin. $(u - \alpha)$, donc Sin. $(u - \alpha)$ $=$ Sin. MOL. Cotang. POM. Sin. $\alpha - 2$Sin. $(\frac{1}{2}$ MOL$)^2$. Sin. α. Cosin. α $+$ 2Sin. $(\frac{1}{2}$ MOL$)^2$. Sin. α^2 Sin. $(u - \alpha) =$ Sin. MOL Cotang. POM Sin. $\alpha - \frac{1}{2}$ (MOL$)^2$ Sin. α Cosin. $\alpha + \frac{1}{2}$ (MOL$)^3$ Sin. α^3 Cotang. POM; mais Cotang. PΘM — O$\lambda\Theta$ Cosec. POM^2 $=$ Cotang. POM $=$ Tang. $(\lambda + \Delta\lambda) - e^2 A$ Cosin. α, et Sin. MOL $=$ MOL $- \frac{1}{6}$ (MOL$)^3$; donc Sin. $(u - \alpha)$ $=$ MOL Tang. $(\lambda + \Delta\lambda)$ Sin. $\alpha - \frac{1}{2}$ (MOL$)^2$ Sin. α Cosin. $\alpha - e^2 A^2$ Sin. α Cosin. $\alpha - \frac{1}{6} A^3$ Tang. λ. Sin. $\alpha + \frac{1}{2} A^3$ Tang. λ Sin. α^3, et $u = \alpha +$ MOL Tang. $(\lambda + \Delta\lambda)$ Sin. $\alpha - \frac{1}{2}$ (MOL$)^2$ Sin. α Cosin. $\alpha - e^2 A^2$ Sin. α Cosin. $\alpha + \frac{1}{2} A^3$ Tang. λ Sin. α $\left(\text{Sin. } \alpha^2. \ (1 + \frac{1}{3} \text{ Tang. } \lambda^2) - \frac{1}{3}\right)$. Mais z étant supposé $=$ le supplément de l'angle que font entr'eux les plans LMΘ et PMΘ, il s'ensuit, que sin OMΘ Cotang. LMO — Cosin. OMΘ Cosin. u $= -$ Sin. u Cotang. z $= -$ Sin. u Cotang. $(u + z - u) = -$ Sin. u $\left(\text{Cotang. } u - (z - u) \text{ Cosec. } u^2\right) = -$ Cosin. u $+ (z - u)$ Cosec. u, par conséquent $(z - u)$ Cosec. u $=$ Sin. OMΘ Cotang. LMO $+$ 2Sin. $(\frac{1}{2}$ OM$\Theta)^2$ Cosin. u, et $z - u$ $=$ Sin. OMΘ Tang. $(100° -$ LMO$)$ Sin. u $+$ 2Sin. $(\frac{1}{2}$ OM$\Theta)^2$ Sin. u Cosin. u; desorte qu'à cause de $100°$ $-$ LMO $= \frac{1}{2}$ MOL $= \frac{1}{2}$ A, $z - u$ sera $= \frac{1}{2} e^2 A^2$ Sin. α Cosin. α Cosin. λ^2, et delà z (ou l'azimuth de L vû de M et compté du sud) $= \alpha +$ A Tang. $(\lambda + \Delta\lambda)$ Sin. $\alpha - \frac{1}{2} A^2$ Sin. α Cosin. $\alpha + \frac{1}{2} A^3$ Tang. λ Sin. $\alpha \left(\text{Sin. } \alpha^2 \ (1 + \frac{1}{3} \text{ Tang. } \lambda^2) - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} e^2 A$ Sin. α Sin. λ^2 Tang. $\lambda - \frac{1}{2} e^2 A^2$ Sin. α Cosin. α Sec. $\lambda^2 - \frac{1}{8} e^4 A$ Sin. λ^4 Tang. λ Sin. α.

§. 45.

Enfin $\text{Sin. } P = \text{Sin. } \alpha \text{ Cosec. } POM \text{ Sin. } ML = MOL \text{ Sin. } \alpha \text{ Cosec. } POM - \frac{1}{6} A^3 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } \lambda$, et delà $P = MOL \text{ Sin. } \alpha \text{ Cosec. } POM + \frac{1}{6} A^3 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } \lambda . (\text{Sin. } \alpha^2 \text{ Sec. } \lambda^2 - 1)$; mais $\text{Cosec. } POM = \text{Cosec. } (P\Theta M + OM\Theta) = \text{Cosec. } P\Theta M - OM\Theta \text{ Cosin. } P\Theta M \text{ Cosec. } OM\Theta^2 = \text{Sec. } (\lambda + \Delta\lambda) - e^2 A \text{ Cosin. } \alpha \text{ Sin. } \lambda$, donc $P = MOL \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } (\lambda + \Delta\lambda) - e^2 A^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Cosin. } \alpha \text{ Sin. } \lambda + \frac{1}{6} A^3 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } \lambda (\text{Sin. } \alpha^2 \text{ Sec. } \lambda^2 - 1) = A \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } (\lambda + \Delta\lambda) - \frac{1}{2} e^2 A \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \lambda \text{ Tang } \lambda - \frac{1}{2} e^2 A^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Cosin. } \alpha \text{ Sin. } \lambda (\text{Tang. } \lambda^2 + 2) - \frac{1}{8} e^4 A \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \lambda^3 \text{ Tang. } \lambda + \frac{1}{6} A^3 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sec. } \lambda (\text{Sin. } \alpha^2 \text{ Sec. } \lambda^2 - 1)$ = la différence des méridiens de L et M.

§. 46.

Ces formules que nous venons de rapporter, nous ont servi dans le calcul de la suite qui s'étend de Mallôrn à Pahtavara; et la valeur que nous avons employé préalablement pour l'excentricité du méridien est $= \frac{1}{12.84523} = 0.0778499$ (ce qui répond à $\frac{1}{329.49}$ d'applatissement) d'où il a résulté le tableau suivant.

	Distance du parallèle à celui de μ.	Hauteur du Póle.
μ		$72^\circ 80' 56'' 372$
E	$7100^m.554$	$72^\circ 87' 64'' 085$
F	$14455^m.380$	$72^\circ 94' 97'' 140$
h	$18447^m.660$	$72^\circ 98' 95'' 051$
f	$24624^m.723$	$73^\circ 05' 10'' 720$
q	$31819^m.383$	$73^\circ 12' 27'' 812$
k	$32524^m.568$	$73^\circ 12' 98'' 156$
θ	$33798^m.251$	$73^\circ 14' 25'' 106$
T	$36038^m.369$	$73^\circ 16' 48'' 383$
n	$65989^m.037$	$73^\circ 46' 33'' 621$
K	$68468^m.729$	$73^\circ 48' 80'' 778$

	Distance du parallèle à celui de μ.	Hauteur du Pôle.
C	80465^m.623	73°60'76''531
B	83445^m.446	73°63'73''534
A	97145^m.261	73°77'39''020
b	97849^m.007	73°78'09''164
H	104688^m.519	73°84'90''825
N	117182^m.657	73°97'36''133
P	124844^m.951	74°04'99''846
a	140624^m.667	74°20'72''632
Q	143078^m.004	74°23'24''245
t	151288^m.132	74°31'35''474
G	159174^m.291	74°39'21''499
π	180827^m.680	74°60'79''723

Remarque. Le secteur employé par les Académiciens de France ayant été 73 toises 4 piéds 5.5 pouces = 143^{m}728 = 14''325 au midi du centre de la flèche de l'église de la ville de Torneå, il s'ensuit que la hauteur du pôle de celuici étoit = 73°16'34''058 (= 65° 50'49''435 selon la division sexagésimale), ce qui est précisement celle qui résulte des observations faites au commencement du Janvier l'an 1737; de sorte que dans cet élément nous ne différons point du tout des déterminations anciennes. Au contraire la distance des parallèles de T et Q étant = 107039^{m}635 = 54919^{t}2537 d'après nos déterminations, et 54945^{t}95 d'après celle qui a été adopté par Maupertuis, il s'ensuit que 26^t.7 est la quantité dont les opérations géodesiques diffèrent; Au lieu qu'en prenant le milieu des différentes combinaisons rapportées dans la figure de la Terre, la valeur de cette distance est = 54925^{t}63, ce qui ne diffère de notre détermination que de 6^{t}38, dont on peut encore expliquer 5^{t}355 de ce que la base mesurée l'an 1736 n'avoit point été nivellée.

§. 47.

De plus soit la distance du point L à l'équateur, c'est à dire l'arc QL $= z$; alors dz sera à $-$ dx comme le rayon au sinus de la latitude, et delà $dz = - dx$ Cosec. $\lambda = - a$ Cosec. $\lambda . d \left(\frac{\text{Cosin. } \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2}} \right) = \frac{a(1 - e^2) d\lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2)^3}}$ Par conséquent si l'on a deux arcs du méridien dont $\Delta\lambda_0$ et $\Delta\lambda_1$ soient les amplitudes, et qui commencent aux latitudes de λ_0 et λ_1 pour se terminer à celles de $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ et $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$; de plus si Δz_0 et Δz_1 sont les valeurs de ces arcs exprimées en Mètres ou quelque autre mesure de distance, et qu'on suppose $u = e^2$, et $v = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2)^3}}$, il s'ensuivra que Δz_0 sera à Δz_1 comme $\Delta \int v_0 d\lambda_0$ à $\Delta \int v_1 d\lambda_1$. Or, si tous les méridiens étoient des cercles parfaits, Δz_0 seroit à Δz_1 comme $\Delta\lambda_0$ à $\Delta\lambda_1$; mais à cause de leur Ellipticité l'analogie précédente n'a lieu qu'à peu près, de sorte qu'à la rigueur Δz_0 est à $\Delta z_1 = (\Delta\lambda_0 : \Delta\lambda_1).(1 : 1 + \alpha)$, c'est dire $\Delta \int v_0 d\lambda_0 : \Delta \int v_1 d\lambda_1 = \Delta\lambda_0 : (1 + \alpha)\, \Delta\lambda_1$, et delà $\Delta\lambda_0 . \Delta \int v_1 d\lambda_1 = (1 + \alpha)\, \Delta\lambda_1 . \Delta \int v_0 d\lambda_0$ (α étant donné par l'observation, en ayant déterminé par des mesures faites exprés les valeurs de $\Delta\lambda_0$, $\Delta\lambda_1$, Δz_0 et Δz_1, apres quoi α sera $= \frac{\Delta\lambda_0 . \Delta z_1}{\Delta\lambda_1 . \Delta z_0} - 1$). Donc, en différentiant par rapport à u, il s'ensuit que $du\, \Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{dv_1}{du}\right) d\lambda_1 = d\alpha\, \Delta\lambda_1 \int \Delta v_0 d\lambda_0 + (1 + \alpha)\, du\, \Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{dv_0}{du}\right) d\lambda_0$, $d^2u\, \Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{dv_1}{du}\right) d\lambda_1 + du^2 \Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{d^2 v_1}{du^2}\right) d\lambda_1 = 2 du d\alpha . \Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{dv_0}{du}\right) d\lambda_0$

$+ (1+\alpha) d^2u \; \Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{dv_0}{du}\right) d\lambda_0 + (1+\alpha) du^2$
$\Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{d^2v_0}{du^2}\right) d\lambda_0$, de sorte qu'en supposant que α étant $= 0$, u devienne $=$ U, $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^n U}{d\alpha^n}\right)$, $V = v$, et $\left(\frac{d^n v}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^n V}{d\alpha^n}\right)$, il en résultera $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) =$

$$\frac{\Delta\lambda_1 \int \Delta v_0 \, d\lambda_0}{\Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{dV_1}{du}\right) d\lambda_1 - \Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{dV_0}{du}\right) d\lambda_0},$$

et $\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)$

$$\frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2}{\Delta\lambda_1 \int \Delta V_0 d\lambda_0} \left\{ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) \left(\Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{d^2V_0}{du^2}\right) d\lambda_0 - \Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{d^2V_1}{du^2}\right) d\lambda_1 \right) + 2\Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{dV_0}{du}\right) d\lambda_0 \right\}.$$

Mais v étant $= \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2)^3}}$, $\left(\frac{dv}{du}\right)$ sera $= \frac{3 \text{Sin. } \lambda^2}{2\sqrt{(1 - e^2 \text{Sin.} \lambda^2)^5}}$, et $\left(\frac{d^2v}{du^2}\right) = \frac{3 \cdot 5 \text{Sin. } \lambda^4}{4\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2)^7}}$, de sorte que $\frac{dV}{du}$ soit $= \frac{3}{2}$ Sin. $\lambda^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$ Cosin. 2λ, $\frac{d^2V}{du^2} = \frac{15}{4}$ Sin. $\lambda^4 = \frac{45}{32} - \frac{15}{8}$ Cosin. $2\lambda + \frac{15}{32}$ Cosin. 4λ, $\int \Delta V . d\lambda =$
$\Delta\lambda, \int \Delta \left(\frac{dV}{du}\right) d\lambda = \frac{3}{4} \Delta\lambda - \frac{3}{4}$ Sin. $\Delta\lambda$ Cosin. $(2\lambda + \Delta\lambda)$,
$\int \Delta \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) d\lambda = \frac{45}{32} \Delta\lambda - \frac{15}{8}$ Sin. $\Delta\lambda$ Cosin. $(2\lambda + \Delta\lambda)$
$+ \frac{15}{64}$ Sin. $2\Delta\lambda$ Cosin. $(4\lambda + 2\Delta\lambda)$, et delà $\Delta\lambda_1 \int \Delta v_0$
$d\lambda_0 = \Delta\lambda_1 . \Delta\lambda_0$, $\Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{dV_1}{du}\right) d\lambda_1 - \Delta\lambda_1 . \int \Delta \left(\frac{dV_0}{du}\right)$

$d\lambda_0 = \frac{3}{4}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Sin.}\,\Delta\lambda_0.\ \text{Cosin.}\,(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) - \frac{3}{4}$ $\Delta\lambda_0.\ \text{Sin.}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Cosin.}\,(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1)$, et $\Delta\lambda_1 \int \Delta \left(\frac{d^2V_0}{du^2}\right)$ $d\lambda_0 - \Delta\lambda_0 \int \Delta \left(\frac{d^2V_1}{du^2}\right) d\lambda_1 = \frac{15}{8}\,\Delta\lambda_0.\ \text{Sin.}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Cosin.}\,(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) - \frac{15}{8}\Delta\lambda_1.\text{Sin.}\,\Delta\lambda_0.\ \text{Cos.}\,(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ $+ \frac{15}{64}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_0\ \text{Cosin.}\,(4\lambda_0 + 2\Delta\lambda_0) - \frac{15}{64}$ $\Delta\lambda_0.\ \text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_1.\ \text{Cosin.}\,(4\lambda_1 + 2\Delta\lambda_1)$; d'où il s'ensuit que $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ sera $=$

$$\frac{1}{\frac{3}{4}.\frac{\text{Sin.}\,\Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\text{Cos.}\,(2\lambda_0+\Delta\lambda_0) - \frac{3}{4}.\frac{\text{Sin.}\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_1}\text{Cos.}\,(2\lambda_1+\Delta\lambda_1)},$$

et $\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = \frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2}{\Delta\lambda_0.\Delta\lambda_1} \Big\{ \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) \Big(\frac{15}{8}\,\Delta\lambda_0.\ \text{Sin.}\,\Delta\lambda_1.$ $\text{Cos.}(2\lambda_1+\Delta\lambda_1) - \frac{15}{8}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Sin.}\Delta\lambda_0.\text{Cosin.}\,(2\lambda_0+\Delta\lambda_0)$ $+ \frac{15}{64}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_0.\ \text{Cosin.}\,(4\lambda_0 + 2\Delta\lambda_0) - \frac{15}{64}$ $\Delta\lambda_0\ \text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_1.\ \text{Cosin.}\ (4\lambda_1 + 2\Delta\lambda_1) \Big) + \frac{3}{2}\,\Delta\lambda_0$ $\Delta\lambda_1 - \frac{3}{2}\,\Delta\lambda_1.\ \text{Sin.}\,\Delta\lambda_0.\ \text{Cosin.}\,(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \Big\} = \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3$ $\Big(\frac{15}{64}\,\frac{\text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\,\text{Cosin.}\,(4\lambda_0 + 2\Delta\lambda_0) - \frac{15}{64}\ \frac{\text{Sin.}\ 2\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_1}$ $\text{Cosin.}\,(4\lambda_1 + 2\Delta\lambda_1)\Big) - \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 \Big(1 + \frac{3}{2}.\ \frac{\text{Sin.}\ \Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0}$

Cosin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)\Big)$; c'est à dire, que, si dans la valeur de $\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)$ on suppose $\Delta\lambda = \text{Sin. } \Delta\lambda$, et $2\Delta\lambda = \text{Sin. } 2\Delta\lambda$, il s'ensuivra que $\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)$ sera $= \frac{15}{16} \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3$. Sin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1)$. Sin. $(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0) - \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 \Big(1 + \frac{3}{2}$ Cosin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)\Big)$, après quoi la valeur de u sera $= \alpha\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)$, et l'applatissement du mériden $= 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \sqrt{1 - u} = \frac{1}{2}\, u + \frac{1}{8}\, u^2 = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) + \frac{\alpha^2}{4} \cdot \left(\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2\right)$.

Exemple I. Soit donc $\lambda_0 = -\ 3^\circ 41' 70''$, $\Delta\lambda_0 = 3^\circ 46' 33''$, $\lambda_1 = 45^\circ 95' 82'' 81$, $\Delta\lambda_1 = 10^\circ 74' 86''.63$, $\Delta z_0 = 344779^m.5$, et $\Delta z_1 = 1075058^m.5$; Alors $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ sera $= -\ 3^\circ 37' 07''$, $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 102^\circ 66' 52'' 25$, $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 99^\circ 29' 45'' 25$, et $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0 = 106^\circ 03' 59'' 25$.

Log. $\frac{3}{4}$	= 9.8750613.
Log. $\frac{\text{Sin. } \Delta\lambda_0}{\Delta\lambda_0}$	= 9.9997857.
Log. Cosin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$	= 9.9993909.
	9.8742379.
	9.7485795.

$$\text{Log. } \tfrac{3}{4} = 9.8750613.$$

$$\text{Log. } \frac{\text{Sin. } \Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_1} = 9.9979347.$$

$$\text{Log. Cosin. } (2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) = 8.6217269.$$

8.4947229.
0.0312409. ajoutant
0.7485795. on aura
0.7798204. dont le logarith. est
9.8919946.

et le complément de celuici ou 0.1080054 est $= \text{Log. } \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$

$$\text{De plus Log. } \tfrac{15}{16} = 9.9719713.$$

$$\text{Log. } \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3 = 0.3240162.$$

$$\text{Log. Sin. } (2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) = 9.9999734.$$

$$\text{Log. Sin. } (2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0) = 9.9980450.$$

0.2940059.
1.967913.

$$\text{Log. } \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = 0.2160108.$$

$$\text{Log. } \tfrac{3}{2} = 0.1760913.$$

$$\text{Log. Cosin } (2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) = 9.9993909.$$

0.3914930.
$-$ 2.463162.

$$-\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -1.644413.$$

$-$ 4.107575 ajoutez.
$+$ 1.967913 vous aurez.

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = -2.139662 \text{ et}$$

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)$$

$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -1.317456$ dont par conséquent le Logarithme sera $= 0.1197362$.

De plus Log. $\Delta z_1 = 6.0314321$.
Log. $\Delta\lambda_0 = 8.7356100$.
Compl. Log. $\Delta z_0 = 4.4624586$.
Compl. Log. $\Delta\lambda_1 = 0.7725257$.

0.0020264.

$1 + \alpha = 1.0046768$.

$\frac{1}{2}\alpha = 0.0023384$.

Log. $\frac{1}{2}\alpha = 7.3689188$ ajoutant.
0.1080054 on aura.
7.4769242 dont le nombre correspondant sera $= 0.002998639$.

De même Log. $\frac{1}{4}\alpha^2 = 4.7378376$ à quoi ajoutant.
0.1197362 on aura.
4.8575738 et le nombre correspondant $= 0.000007204$.

Donc l'applatissement qui résulte de la comparaison de la mesure de Bouguer avec celle de Mechain et Delambre devient $= 0.0029914 = \frac{1}{334.29}$.

Exemple 2. Si λ_0 étoit $= -3°41'70''$, $\Delta\lambda_0 = 3°46'33''$, $\lambda_1 = 72°80'56''372$, et $\Delta\lambda_1 = 1°80'23''351$, $\Delta z_0 = 344779^m.5$ et $\Delta z_1 = 180827^m.68$; Alors $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 = -3°37'07''$, $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 147°41'36''095$, $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 144°04'29''095$, et $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0 = 150°78'43''095$, par conséquent.

Log. $\frac{3}{4} = 9.87506126$.

Log. $\left(\frac{\text{Sin. }\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_0$ 9.99978571.

Log. Cosin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ 9.99939095.

9.87423792.

0.74857952.

Log. $\frac{3}{4}$ = 9.87506126.

Log. $\left(\frac{\text{Sin. } \Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1$ 9.99994212.

Log. Cosin. $(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1)$ 9.83110391.

9.70610729.

0.50828499 ajoutant.

0.74857952 on aura.

1.25686451 dont le logar.est.

0.09928946.

et le complément de celuici ou 9.90071054 = Log. $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$.

De plus Log. $\frac{15}{16}$ = 9.97197128.

Log. Sin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1)$ 9.88653781.

Log. Sin. $(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0)$ 9.84406808.

Log. $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3$ 9.70213162.

9.40470879.

0.25392695.

Log. $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2$ 9.80142108.

Logar. $\frac{3}{2}$ 0.17609126.

Log. Cosin. $(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ 9.99939095.

9.97690329.

— 0.94820731.

$-\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2$ — 0.63302533.

— 1.58123264.

+ 0.25392695.

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = -1.32730569.$$

$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -1.01079302$ dont par conséquent le logarithme est $= 0.00466224$.

De plus Log. $\Delta z_1 = 5.25726493.$
Log. $\Delta\lambda_0$ $8.73560998.$
Compl. Log. Δz_0 $4.46245853.$
Compl. Log. $\Delta\lambda_1$ $1.54804456.$

$0.00337800.$

$1 + \alpha = 1.00780847.$

$\frac{1}{2}\alpha = 0.00390423.$

Log. $(\frac{1}{2}\alpha) = 7.59153543.$
$9.90071054.$

$7.49224597 \ldots\ldots 0.003106318.$

De même Log. $(\frac{1}{2}\alpha)^2 = 5.18307086.$
$0.00466224.$

$5.18773310 \ldots\ldots 0.000015408.$

Donc l'applatissement qui résulte de la comparaison de notre mesure avec celle de Bouguer devient $= 0.00309091 = \frac{1}{323.529}$; et celui qui résulteroit en diminuant de 10 mètres les valeurs de Δz_0 et Δz_1 deviendroit $= 0.00308047 = \frac{1}{324.625}$.

Remarque. Si $\Delta\lambda_1$ avoit été $= 1°80'25''787$ (comme il le deviendroit en calculant les réfractions d'après les expériences de Prony) alors.

Log. Δz_1 seroit $= 5.25726493.$
Log. $\Delta\lambda_0$ $= 8.73560998.$
Compl. Log. Δz_0 $= 4.46245853.$
Compl. Log. $\Delta\lambda_1$ $= 1.54798585.$

$$0.00331929.$$
$$1 + \alpha = 1.00767223.$$
$$\tfrac{1}{2}\,\alpha = 0.00383611.$$
$$\text{Log.}\ (\tfrac{1}{2}\,\alpha) = 7.58389103.$$
$$\underline{9.90071054.}$$
$$7.48460157 \ldots\ldots 0.003052120.$$
$$\text{Log.}\ (\tfrac{1}{2}\,\alpha)^2 = 5.16778206.$$
$$\underline{0.00466224.}$$
$$5.17244430 \ldots\ldots 0.000014875.$$

de sorte que l'applatissement qui résulte de la comparaison de notre mesure avec celle de Bouguer devient dans ce cas $= 0.003037245 = \frac{1}{329.246}$; et en supposant que Δz_0 et Δz_1 eussent été diminués en même temps de 10 mètres, l'applatissement qui en résulte seroit $= 0.003026814 = \frac{1}{330.380}$.

Exemple 3. Si λ_0 étoit $= 45°95'82''81''$, $\Delta\lambda_0 = 10°74'86''63$, $\lambda_1 = 72°80'56''372$ et $\Delta\lambda_1 = 1°80'23''351$, $\Delta z_0 = 1075058^m.5$ et $\Delta z_1 = 180827^m.68$; alors $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ seroit $= 102°66'52''25$, $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 147°41'36''095$, $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 250°07'88''345$, et $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0 = 44°74'83''845$, enfin.

$$\text{Log. } 0{,}75 = 9.87506126.$$
$$\text{Log.}\left(\frac{\text{Sin. }\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_0 = 9.99793463.$$
$$\text{Log. Cosin}\,(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \quad \underline{8.62172687.}$$
$$8.49472276.$$
$$0.03124085.$$
$$\text{Log. } 0{,}75 = 9.87506126.$$

$$\text{Log.}\left(\frac{\text{Sin. }\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1 = 9.99994212.$$

$$\text{Log. Cosin.}(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) = 9.83110391.$$

9.70610729.
0.50828499.
0.03124085.

0.47704414 dont le logarith. est
= 9.67855857 et le complément de celuici ou

$$0.32144143 = \text{Log.}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right).$$

De plus Log. 0,9375 = 9.97197128.

$$\text{Log.}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3 = 0.96432429.$$

$$\text{Log. Sin.}(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) = 9.85002207.$$

$$\text{Log. Sin.}(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0) = 9.81052670.$$

0.59684434.
3.9522495.

$$\text{Log.}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = 0.64288286.$$

Log. 1,5 0.17609126.

$$\text{Log. Cosin.}(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \quad 8.62172687.$$

9.44070099.
+ 0.27586145.

$$-\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -4.39423091.$$

— 4.11836946.
— 3.9522495.

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = -8.070619.$$

$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -5.8735035$ dont le logarithme est $= 0.76889726$.

De plus	Log.	Δz_1	$=$	5.25726493.
	Log.	$\Delta\lambda_0$	$=$	9.22747432.
Compl.	Log.	Δz_0	$=$	3.96856791.
Compl.	Log.	$\Delta\lambda_1$	$=$	1.54804456.
				0.00135172.
				1.00311730.
		$\frac{1}{2}\alpha$	$=$	0.00155865.
	Log.	$(\frac{1}{2}\alpha)$	$=$	7.19274860.
				0.32144143.
				7.51419003 .... 0.003267308.
De même	Log.	$(\frac{1}{2}\alpha)^2$	$=$	4.38549720.
				0.76889726.
				5.15439446 .... 0.000014269.

Donc l'applatissement qui résulte de la comparaison de notre mesure avec celle de MECHAIN et DELAMBRE devient $= 0.003253039 = \frac{1}{307.405}$; et celui qu'on obtiendroit en augmentant Δz_0 et diminuant Δz_1 de dix mètres est $= 0.003185707 = \frac{1}{313.902}$. Or, si on fait $3090091 - \mu.\ 1044 = 3253039 - \mu.\ 6733.2$ (c'est à dire $0.00309091 - \mu\ (0.00309091 - 0.00308047) = 0.003253039 - \mu(0.003253039 - 0.003185707)$) la valeur, qui en résultera pour μ, fera voir de combien de mètres il faut altérer les déterminations des arcs du méridien mesurés en Perou, en France et en Lapponie pour les concilier entr'eux; donc μ étant $= 2.85$ il s'ensuit que la correction à faire est $= 28^m.5$; enfin l'applatissement, qui y répond est $= 0.003061158 = \frac{1}{326.674}$.

Remarque. Au contraire si $\Delta\lambda_1$ avoit été $= 1° 80' 25'' 787$ (comme il le devient en calculant les réfractions d'après les expériences de Prony) l'applatissement qui en résulte seroit devenu $= 0.003112128 = \frac{1}{321.324}$; et si en augmentant Δz_0 on diminuoit Δz_1 de 10 mètres, l'applatissement qui en résulte deviendroit $= 0.003044771 = \frac{1}{328.432}$. Faisant donc $3037245 - 10431.\mu = 3112128 - 67357.\mu$, μ deviendra $= 1.3154$, ce qui fait voir, qu'on peut concilier les trois déterminations des arcs du méridien mesurés en Perou, en France et en Lapponie, en les altérant seulement de 13.154 mètres, savoir en diminuant ceux du Perou et de la Lapponie, tandis qu'il faut augmenter celui de la France; enfin l'applatissement qui résulte de cette hypothèse est $= 0.003023524 = \frac{1}{330.74}$.

Exemple 4. Si λ_0 étoit $= 13° 42' 59''$, $\Delta\lambda_0 = 1°$, $\lambda_1 = 72° 80' 56'' 372$, $\Delta\lambda_1 = 1° 80' 23'' 351$, $\Delta z_0 = 99556^m.6$, et $\Delta z_1 = 180827^m.68$; Alors $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ seroit $27° 85' 18''$, $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 147° 41' 36'' 095$, $2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = 175° 26' 54'' 095$, et $2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0 = 119° 56' 18'' 095$ enfin.

$$\text{Log. } 0{,}75 = 9.87506126.$$
$$\text{Log.} \left(\frac{\text{Sin. } \Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_0 \quad 9.99998214.$$
$$\text{Log. Cosin. } (2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \quad 9.95703985.$$
$$9.83208325.$$
$$0.67933384.$$
$$\text{Log. } 0{,}75 = 9.87506126.$$
$$\text{Log.} \left(\frac{\text{Sin. } \Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1 \quad 9.99994212.$$
$$\text{Log. Cosin. } (2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) \quad \underline{9.83110391.}$$

9.70610729.
0.50828499.
0.67933383.
1.18761882 dont le logar. est
0.07470709.

et le complément de celuici ou = log. $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ 9.92529291.

De plus Log. 0,9375 = 9.97197128.

$$\text{Log.}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^3 \quad 9.77587873.$$

$$\text{Log. Sin.}(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0 + 2\lambda_1 + \Delta\lambda_1) \quad 9.57844251.$$

$$\text{Log. Sin.}(2\lambda_1 + \Delta\lambda_1 - 2\lambda_0 - \Delta\lambda_0) \quad 9.97916627.$$

9.30545879.
0.20204995.

$$\text{Log.}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = 9.85058582.$$

Log. 1,5. 0.17609126.

$$\text{Log. Cosin.}(2\lambda_0 + \Delta\lambda_0) \quad 9.98067355.$$

0.00735063.
− 1.01706951.

$$-\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -0.70890134.$$

− 1.72597085.
+ 0.20204995.

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) = -1.5239209.$$

$$\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = -1.16947023$$ dont par conséquent le logarithme = 0,06798915.

De

De plus Log. $\Delta z_1 =$ 5.25726493.
Log. $\Delta\lambda_0$ 8.19611988.
Compl. Log. Δz_0 5.00193432.
Compl. Log. $\Delta\lambda_1$ 1.54804456.

0.00336369.
$1 + \alpha =$ 1.00777524.
$\frac{1}{2}\,\alpha =$ 0.00388762.
Log. $(\frac{1}{2}\,\alpha) =$ 7.58968384.
9.92529291.

7.51497675.... 0.003273232.
Log. $(\frac{1}{2}\,\alpha)^2 =$ 5.17936768.
0.06798915.

5.24735683 ....0.000017675.

Donc l'applatissement qui résulte de la comparaison de notre mesure avec celle qui vient d'être exécutée dans les Indes Orientales est 0.003255557 $= \frac{1}{307.167}$.

Remarque. L'applatissement le plus probable qui résulte des déterminations précédentes est = 0.00309535 $= \frac{1}{323.065}$, ce qui suppose que le dégré de Perou doit être diminué de 14.01 mètres, celui des Indes Orientales augmenté de $24^m.25$, celui de France augmenté de $2^m.18$ et celui de Lapponie diminué de $12^m.98$; d'où le rayon de l'équateur = $6376161^m.7$, et la moitié de l'axe = $6356425^m.2$. Au contraire si on adoptoit 1° 80′25″787 pour la valeur de l'arc du méridien compris entre Mallörn et Pahtavara (comme il le devient en calculant les réfractions d'aprés les expériences de Prony), l'applatissement le plus probable seroit 0.003083757 = $\frac{1}{324.28}$, ce qui suppose que le dégré de Perou devroit

A a

être diminué de $13^m.94$, celui des Indes Orientales augmenté de $24^m.15$, celui de France augmenté de $0^m.39$ et celui de Lapponie diminué de $2^m.31$ de sorte que le rayon de l'équateur qui en résulteroit seroit = $6376014^m.8$ et la moitié de l'axe = $6356352^m.7$.

§. 48.

Nous venons de voir dans ce qui précède que $dz = \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{\sqrt{(1-e^2 \,\text{Sin.}\, \lambda^2)^3}}$; or u étant une fonction quelconque de $\varepsilon = 2\,\text{Cosin.}\,\lambda^{(0)}$, u sera $= U + \left(\frac{d^2U}{d\varepsilon^2}\right) + \left(\frac{1}{1.2}\right)^2.\left(\frac{d^4U}{d\varepsilon^4}\right) + \left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2.\left(\frac{d^6U}{d\varepsilon^6}\right) + \&c. + 2\,\text{Cosin.}\,\lambda^{(0)}\left(\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^2.\left(\frac{d^3U}{d\varepsilon^3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2}\right)^2.\left(\frac{d^5U}{d\varepsilon^5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2.\left(\frac{d^7U}{d\varepsilon^7}\right) + \&c.\right) + 2\,\text{Cosin.}\,2\lambda^{(0)}\left(\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2U}{d\varepsilon^2}\right) + \frac{1}{2.3}.\left(\frac{1}{1}\right)^2.\left(\frac{d^4U}{d\varepsilon^4}\right) + \frac{1}{3.4}\left(\frac{1}{1.2}\right)^2.\left(\frac{d^6U}{d\varepsilon^6}\right) + \&c.\right) + 2\,\text{Cosin.}\,3\lambda^{(0)}\left(\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3U}{d\varepsilon^3}\right) + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{1}{1}\right)^2.\left(\frac{d^5U}{d\varepsilon^5}\right) + \frac{1}{3.4.5}\left(\frac{1}{1.2}\right)^2.\left(\frac{d^7U}{d\varepsilon^7}\right) + \&c.\right) + \&c$; de sorte, que, si u étoit $= (1 - e^2\,\text{Sin.}\,\lambda^2)^n = \left(1 - e^2\,\text{Cosin.}\,(100^\circ - \lambda)^2\right)^n = (1 - \frac{1}{4}e^2\varepsilon^2)^n$, $\lambda^{(0)} = 100^\circ - \lambda$, $\frac{d^{2m+1}U}{d\varepsilon^{2m+1}} = 0$, $\frac{d^{2m}U}{d\varepsilon^{2m}} = \pm\, \overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\,.\,\overline{m+3} \ldots\ldots 2m\,.\,n\,.\,\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2} \ldots\ldots \overline{n-m+1}\,.\left(\frac{e}{2}\right)^{2m}$, et $\text{Cosin.}\,2m\,(100^\circ - \lambda) = \pm\,\text{Cosin.}\,2m\lambda$ (en prenant le signe supérieur, ou l'inférieur, selon que m est un nombre pair

ou impair); donc $\frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \text{ Sin. } \lambda^2)^3}} = 1 + 3\left(\frac{e}{2}\right)^2$
$+ \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{3.4}{1.2} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{4.5.6}{1.2.3} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}$
$\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. - 2\text{Cosin. } 2\lambda \left(\frac{3}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{4}{1} \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right.$
$\left. + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{6.5}{1.2} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{8.7.6}{1.2.3} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) +$
$2\text{Cosin. } 4\lambda \left(\frac{3.5}{2.4} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{8.7}{1.2} \cdot \right.$
$\left. \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) - 2\text{Cosin. } 6\lambda \left(\frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \right.$
$\left. \frac{8}{1} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) + 2\text{Cosin. } 8\lambda \left(\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right)$
$+ \&c.$ par conséquent $z = a\lambda \left(1 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \right.$
$\left. \frac{5}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{175}{64} \left(\frac{e}{2}\right)^8 - \&c. \right) - a\text{Sin. } 2\lambda \left(\frac{3}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \right.$
$\left. \frac{3}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{45}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{105}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) + \frac{1}{2} a\text{Sin.}$
$4\lambda \left(\frac{15}{8} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{45}{8} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{525}{32} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) -$
$\frac{1}{3} a\text{Sin. } 6\lambda \left(\frac{35}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{175}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) + \frac{1}{4} a\text{Sin.}$
$8\lambda \left(\frac{35}{128} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) + \&c.$ et delà $\Delta z = a\Delta\lambda$
$\left(1 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{175}{64} \left(\frac{e}{2}\right)^8 \right.$
$\left. - \&c. \right) - 2a \text{ Sin. } \Delta\lambda \text{ Cosin. } (2\lambda + \Delta\lambda) \left(\frac{3}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^2 \right.$
$\left. + \frac{3}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{45}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{105}{16} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c. \right) +$

$a\text{Sin. } 2\Delta\lambda \text{ Cosin. } (4\lambda + 2\Delta\lambda)\left(\frac{15}{8}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{45}{8}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{525}{32}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c.\right) - \frac{2}{3} a\text{Sin. } 3\Delta\lambda \text{ Cosin. } (6\lambda + 3\Delta\lambda)\left(\frac{35}{16}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{175}{16}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c.\right) + \frac{1}{2} a \text{ Sin. } 4\Delta\lambda \text{ Cosin. } (8\lambda + 4\Delta\lambda)\left(\frac{35}{128}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \&c.\right) + \&c.$

§. 49.

Par conséquent la valeur de l'arc du méridien compris entre les latitudes de $\lambda^{(0)} - \frac{1}{2}\mu^\circ$ et $\lambda^{(0)} + \frac{1}{2}\mu^\circ$ sera $= 100001^m.56\ \mu - 29604^m.68$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 28^m.68$ Sin. $2\mu^\circ$ Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^m.03$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)} = 51308^t.200\mu - 15189^t392$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 14^t716$ Sin. $2\mu^\circ$. Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^t017$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)} = 336817^f.81\mu - 99712^f.28$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 96^f.60$ Sin. $2\mu^\circ$ Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^f.11$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)}$, et delà le dégré compté depuis la latitude de $\lambda^{(0)} - 0^\circ.5$ jusqu'à celle de $\lambda^{(0)} + 0^\circ.5 = 100001^m.56 - 465^m.01$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^m.90$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 51308^t.200 - 238^t.585$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^t462$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 336817^f.81 - 1566^f.21$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 3^f.03$ Cosin. $4\lambda^{(0)}$; enfin le dégré sexagésimal $= 111112^m.84 - 516^m.67$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 1^m.00$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 57009^t.111 - 265^t.08$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^t.513$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 374242^f.01 - 1740^f.15$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 3^f.70$ Cosin. $4\lambda^{(0)}$, et le quart de la circonférence de l'équateur 10015651 mètres = 5138770 toises = 33733971 pieds de Suède. Or pour faciliter la comparaison avec d'autres mesures nous avons encore construit d'après ces résultats la Table suivante de la valeur du dégré du méridien pour toutes les latitudes.

TABLE.

De la valeur d'un dégré décimal de latitude exprimée en Mètres, et calculée pour chaque dégré d'élévation du pôle du point milieu.

	Mètres.	Diff. 1	Diff. 2		Mètres.	Diff. 1	Diff. 2
0°	99537.45	0.23	0.45	37	99816.26	13.47	0.15
1	99537.68	0.68	0.45	38	99829.73	13.62	0.16
2	99538.36	1.13	0.47	39	99843.35	13.78	0.16
3	99539.49	1.60	0.45	40	99857.13	13.94	0.12
4	99541.09	2.05	0.44	41	99871.07	14.06	0.12
5	99543.14	2.49	0.44	42	99885.13	14.18	0.10
6	99545.63	2.93	0.46	43	99899.31	14.28	0.09
7	99548.56	3.39	0.43	44	99913.59	14.37	0.08
8	99551.95	3.82	0.44	45	99927.96	14.45	0.06
9	99555.77	4.26	0.44	46	99942.41	14.51	0.04
10	99560.03	4.70	0.42	47	99956.92	14.55	0.03
11	99564.73	5.12	0.44	48	99971.47	14.58	0.03
12	99569.85	5.56	0.41	49	99986.05	14.61	0.00
13	99575.41	5.97	0.41	50	100000.66	14.61	0.01
14	99581.38	6.38	0.41	51	100015 27	14 60	0.03
15	99587.76	6.79	0.40	52	100029.87	14.57	0.04
16	99594.55	7.19	0.39	53	100044.44	14.53	0.06
17	99601.74	7.58	0 39	54	100058.97	14 47	0.06
18	99609.32	7.97	0.38	55	100073.44	14.41	0.07
19	99617.29	8.35	0.36	56	100087.85	14.34	0.12
20	99625.64	8.71	0.37	57	100102.19	14.22	0.10
21	99634.35	9.08	0.35	58	100116.41	14.12	0.12
22	99643.43	9.43	0.35	59	100130.53	14.00	0.14
23	99652.86	9.78	0.33	60	100144.53	13.86	0.16
24	99662.64	10.11	0.32	61	100158.39	13.70	0.17
25	99672.75	10.43	0.32	62	100172.09	13.53	0.17
26	99683.18	10.75	0.30	63	100185.62	13.36	0.20
27	99693.93	11.05	0.30	64	100198.98	13 16	0.20
28	99704.98	11.35	0.27	65	100212.14	12.96	0.22
29	99716.33	11.62	0.29	66	100225.10	12.74	0.24
30	99727.27	11.91	0.25	67	100237.84	12.50	0.24
31	99739.86	12.16	0.24	68	100250.34	12.26	0.25
32	99752.02	12.40	0.24	69	100262.60	12.01	0.27
33	99764.42	12.64	0.22	70	100274.61	11.74	0.29
34	99777.06	12.86	0.22	71	100286.35	11.45	0.28
35	99789.92	13.08	0.18	72	100297.80	11.17	0.32
36	99803.00	13.26	0.21	73	100308.97	10.85	0.30

	Mètres.	Diff. 1	Diff. 2
74	100319.82	10.55	0.32
75	100330.37	10.23	0.35
76	100340.60	9.88	0.33
77	100350.48	9.55	0.37
78	100360.03	9.18	0.35
79	100369.21	8.83	0.38
80	100378.04	8.45	0.38
81	100386.49	8.07	0.39
82	100394.56	7.68	0.39
83	100402.24	7.29	0.40
84	100409.53	6.89	0.43
85	100416.42	6.46	0.39
86	100422.88	6.07	0.45
87	100428.95	5.62	0.42
88	100434.57	5.20	0.43
89	100439.77	4.77	0.44
90	100444.54	4.33	0.45
91	100448.87	3.88	0.45
92	100452.75	3.43	0.44
93	100456.18	2.99	0.46
94	100459.17	2.53	0.46
95	100461.70	2.07	0.45
96	100463.77	1.62	0.47
97	100465.39	1.15	0.45
98	100466.54	0.70	0.47
99	100467.24	0.23	
100	100467.47		

REMARQUE. Au contraire si on adoptoit les résultats que nous avons obtenu en calculant les réfractions d'après les expériences de PRONY, il s'ensuivroit que le quart de la circonférence de l'équateur seroit = 10015420 mètres = 5138652 toises = 33733192 piéds de Suède, la valeur de l'arc du méridien compris entre les latitudes de $\lambda^{(0)} - \frac{1}{2}\mu^\circ$ et $\lambda^{(0)} + \frac{1}{2}\mu^\circ = 99999^m.837\mu - 29493^m.08$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 28^m46$ Sin. $2\mu^\circ$ Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^m.03$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)} = 51307^t.316\mu - 15132^t.14$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 14^t.60$ Sin. $2\mu^\circ$ Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^t02$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)} = 336812^f01\mu - 99336^f40$ Sin. μ° Cosin. $2\lambda^{(0)} + 95^f86$ Sin. $2\mu^\circ$ Cosin. $4\lambda^{(0)} - 0^f.11$ Sin. $3\mu^\circ$ Cosin. $6\lambda^{(0)}$, le dégré du méridien compté depuis la latitude $\lambda^{(0)} - 0^\circ.5$ jusqu'à $\lambda^{(0)} + 0^\circ.5 = 99999^m.837 - 463^m26$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^m.89$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 51307^t316 - 237^t685$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^t459$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 336812^f01 - 1560^f.31$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 3^f.01$ Cosin. $4\lambda^{(0)}$, et le dégré sexagésimal $= 111110^m.93 - 514^m.70$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^m.99$ Cosin. $4\lambda^{(0)} = 57008^t129 - 264^t094$ Cosin. $2\lambda^{(0)} + 0^t510$ Cosin.

$4\lambda^{(o)} = 374235^f57 - 1733^f59$ Cosin. $2\lambda^{(o)} + 3^f34$ Cosin. $4\lambda^{(o)}$.

§. 50.

Avant de finir nous allons encore rassembler ici dans un même lieu tous les principaux résultats de notre expédition, savoir la base mesurée immédiatement par nous et à la température de $- 4^\circ.313$ du thermomètre centigrade ayant été $= 14451^m.912$, la somme des corrections pour la réduction à l'horizon $= - 1^m.4090648$, la correction pour la réduction à la température de zéro $= - 0^m.7131173$, la correction pour la réduction au centre du signal à Niemisby $= + 1^m.4318$, et à Poiki Torneå $= + 0^m.0047$, enfin la correction pour la réduction au niveau de la mer $= - 0^m.1102744$; d'où la distance des centres des signaux à Niemisby et Poiki Torneå, ou la base employée dans la suite, $= 14451^m.116 = 7414^t.4919 = 48673^f.174$ *), et delà la di-

*) À cette occasion il faut, que nous réiterons encore la remarque, que nous avons vû ailleurs; savoir, que dans toutes les déterminations précédentes nous sommes partis de la supposition, que l'étalon, qui nous est arrivé de la part de l'Institut National de France, soit en toute rigueur égal au double Mètre à la température de zéro dégré du Thermomètre centigrade. Or si on supposoit qu'il ne soit en effet qu'à celle de $+ 16^\circ.25$ (ce qui est encore celle de la Toise de Perou, à la quelle on a comparé le Mètre en le faisant $= 443.2959$ lignes $= 0.513074$ Toises), alors la base auroit été $= 14448.4292$ Mètres $= 7413.1124$ Toises $= 48664.101$ pieds de Suède, et la distance des parallèles de Mallörn et de Pahtavara $= 180794.06$ Mètres $= 92760.731$ toises $= 608937.09$ pieds de Suède; de sorte que la valeur du dégré décimal à $73^\circ70'68''$ de latitude auroit été $= 100311.013$ Mètres $= 51466.972$ toises $= 337860.04$ pieds de Suéde, (et celle du dégré Sexagèsimal à $66^\circ20'10''$ de latitude $= 111456.681$ Mètres $= 57185.524$ Toises $= 375400.04$ pieds de Suède). Enfin, si on comparoit cette valeur à celle du dégré de Perou déterminé par Bouguer et Condamine, il en ré-

stance des parallèles de Pahtavara et de Mallörn = 180827^m.68 = 92777^t.981 = 609050^f.33 = 12.513053 fois la base. De plus la latitude du centre du signal étoit à Mallörn = 72°80′56″372 (= 65°31′30″265 sexagésim.), et à Pahtavara = 74°60′79″723 (67° 8′49″830 sexagésim.), donc la latitude du point milieu étoit = 73°70′68″047 (66°20′10″047 sexagésim.), l'amplitude de tout l'arc du méridien = 1°80′23″351 (1°37′19″566 Sexagésim.), la valeur du dégré décimal = 100329^m.667 = 51476^t.543 = 337922^f.87 (et celle du dégré sexagésimal = 111477^m.408 = 57196^t.159 375469^{f}86). L'applatissement le plus probable que nous en avons déduit, en faisant la comparaison avec les déterminations faites en Perou, aux Indes Orientales et en France est = 0.00309535 $\frac{1}{323.065}$, et le rayon de l'équateur = 6376162^m = 3271452^t = 21475770^f.

APPEN-

sulteroit $\frac{1}{331.448}$ pour la valeur de l'applatissement de la terre; et si on la compare avec celle de France déterminée par Mechain et Delambre, il n'en résulte que $\frac{1}{326.89}$ pour cette valeur.

APPENDICE.

Contenant des observations dont il a été fait mention dans le discours préliminaire.

Multiplication de l'angle supplémental compris entre le soleil et le centre du signal à Seskar Furö faite à Mallörn le 14 Octobre avant midi, le Thermomètre étant = + 4°0, le Baromètre = 766.9 Millimètres, la pendule B au midi vrai = $0^h2'33''126$, la distance du signal de Seskar Furö au zénith = $100^{\circ}0441$, et la correction pour la réduction au centre du signal à Mallörn = $176''.9$.

0	9h21'52''5 em		16	10h 9'10''5 em	1680°982
1	24'16''3 im		17	14' 0''0	
2	27'38''5 em	221°352	18	16'10''7	1877°119
3	32'13''0 im		19	18' 0''0	
4	34'37''5 em	438°895	20	20'45''0	2071°047
5	37'33''0 im		21	23'57''3	
6	39'52''5 em	653°728	22	26'22''0	2260°980
7	43'22''5 im		23	28'10''3 *	
8	46' 9''7 em	865°463	24	30'28''5	2451°755
9	48'37''0 im		25	33'41''7	
10	53'29''0 em	1073°971	26	36'23''5	2636°572
11	56'42''5 im		27	40'25''0	
12	58'57''0 em	1279°000	28	41'43''7	2819°257
13	10h 2' 6''5 im		29	44'27''0	
14	4'32''0 em	1481°199	30	47' 3''5	2999°514
15	6'52''5 im				

Multiplications de l'angle compris entre le Soleil et le centre du signal à Seskar Furö faites à Mallörn le 14 Octobre après midi, le Thermomètre étant = + 4°0, et le Baromètre = 766.0 Millimètres.

1	5h47' 3''0		3	5h53' 1''7	
2	49'45''3	346°122	4	55'45''0	689°428

Observations des hauteurs correspondantes à Pahtavara.

Le passage d'Aldebaran par le méridien le 10 Decembre, conclû de 10 hauteurs correspondantes = $11^h4'49''025$ B

= 11h9'6''036 du temps moyen; par conséquent la correction à faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = + 4'17''061.

Le passage de α du Bélier par le méridien le 18 Décembre conclû de 13 hauteurs correspondantes = 8h6'58'' 288 B = 8h9'30''059 du temps moyen, d'où la correction qu'il faut faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = + 2'31''771.

Le passage de α du Bélier par le méridien le 20 Décembre conclû de 4 hauteurs correspondantes = 7h59'31'' 313 B = 8h1'38''237 du temps moyen, d'où la correction qu'il faut faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen sera = + 2'6''924.

Le passage d'Aldebaran par le méridien le 23 Décembre conclû de 5 hauteurs correspondantes = 10h16'34''533 B = 10h17'59'' 159 du temps moyen; de sorte, que la correction qu'il faut faire à la pendule B pour avoir le temps moyen soit = + 1'24''626.

Le passage de α du Bélier par le méridien le 24 Decembre conclû de 12 hauteurs correspondantes = 7h44'44'' 187 B = 7h45'54''615 du temps moyen, et delà la correction qu'il faut faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = + 1'10''428.

Le passage de α du Bélier par le méridien le 26 Décembre conclû de 11 hauteurs correspondantes = 7h37'22'' 28 B = 7h38'2''72 du temps moyen, et la correction qu'il faut faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = + 0'40''44.

Le passage de α du Bélier par le méridien le 28 Decembre conclû de 5 hauteurs correspondantes = 7h29'58'' 95 B = 7h30'10''979 du temps moyen, d'où la correction qu'il faut faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = + 0'12''029.

Le passage de γ des Gémeaux par le méridien le 4 Janvier 1803 conclû de 4 hauteurs correspondantes = 11h

33'59''062 B = 11^{h}32'10''824 du temps moyen, et la correction à faire au temps de la pendule B pour avoir le temps moyen = — 1'48''238.

---

*Immersions du premier Satellite de Jupiter *).*

1:o le 22 Decembre à 14^{h}21'25'' B.
2:o le 5 Janvier 1803 à 18^{h}31'12'' B le Thermom. étant = —34°.

Multiplications de l'angle compris entre Kâtkâvara et Pollux (le β des Gemeaux) *le 28 Decembre, le Thermomètre étant = — 31°, le Baromètre = 0^{m}73557, et la distance de Kâtkâvara au zenith = 100°215.*

1	5^{h}34' 9''	
2	35'53''	
3	37 50''3	
4	39'44''	407°945
5	43'29''	
6	51'25''5	607°148
7	54' 8''	
8	56'10''	802°905
9	59'33''	
10	6^{h} 2'46''	995°975

Multiplications de l'angle supplémental de celui qui est compris entre Kâtkâvara et Ataïr (le α de l'aigle) *le 28 Decembre.*

1	6^{h}57'49''5	
2	7^{h} 0'36''	135°805
3	42'37''5	
4	45'59''75	248°050

---

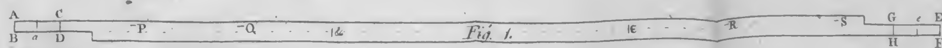
*) voyez dans le discours préliminaire ce que j'ai dit à l'occasion de ces observations.

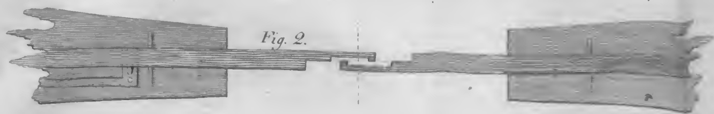
Multiplications du supplément de l'angle compris entre Kâtkâvara et Ataïr (le α de l'aigle) *le 4 Janvier 1803, le Thermomètre étant = — 25°8, et le Baromètre = 0^m74433.*

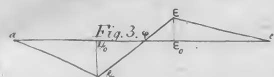
1	5ʰ40'29''75	
2	43'59''5	162°685
3	47' 5''75	
4	55' 9''75	320°735
5	58'39''75	
6	6ʰ 0' 4'' 5	474°472
7	5'37''	
8	21' 4''67	620°895
9	26' 5''	
10	28'21''	760°060

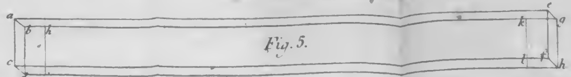
Multiplication de l'angle compris entre Kâtkâvara et Pollux (β des Gemeaux) *le 4 Janvier 1803.*

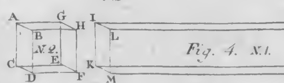
1	6ʰ45'46''	
2	47'43''67	162°830
3	53'45''5	
4	7ʰ10'50''5	319°520
5	14'56''5	
6	17'16''5	470°880
7	23'44''5	
8	59'29''	613°125
9	8ʰ 4'23''	
10	24'34''25	744°430


A
C
B
a
D
P
Q
Fig. 1.
R
S
G
E
H
F

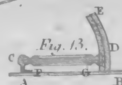

Fig. 2.

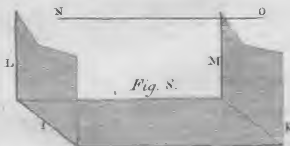

Fig. 3.

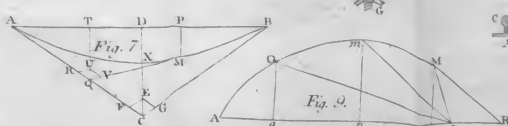

Fig. 5.


A
G
H
I
N
P
B
N.2.
E
L
Fig. 4. N.1.
O
C
D
F
K
M
Q
R
X
S
V
N.3.
T
Y
U
Z


C
D
E
A
B
F
H
K
Fig. 6.
G


E
Fig. 13.
C
D
A
F
G
B


N
O
L
M
Fig. 8.
I
K


A
T
D
P
B
Fig. 7
U
X
M
R
V
Q
E
F
G
C

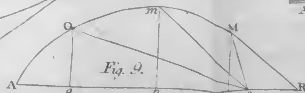
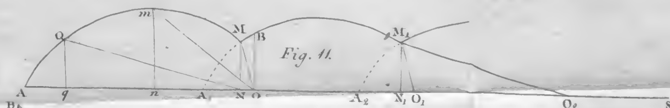
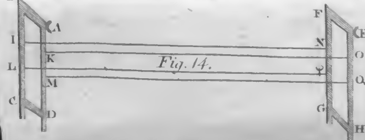
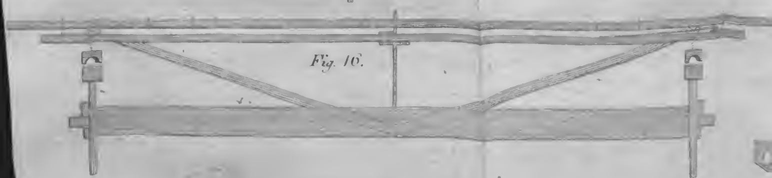

m
Q
M
Fig. 9.
A
q
n
N
O
R


Fig. 10.

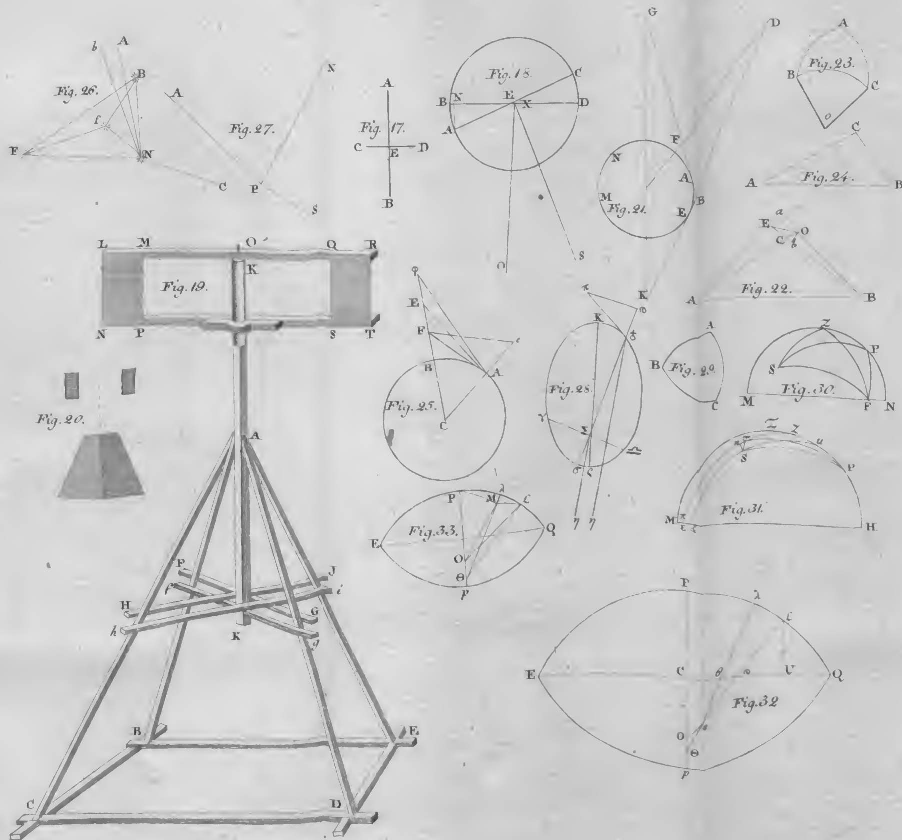

m
Q
M
B
Fig. 11.
A
q
n
N
O
S

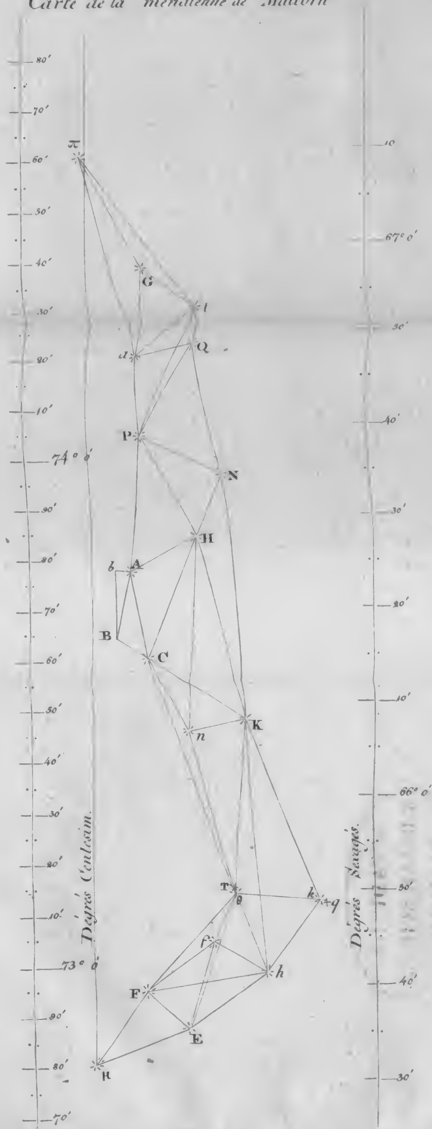

B
A
F
E
I
N
K
O
Fig. 14.
L
M
Q
C
D
G
H


L
Fig. 15
R
S

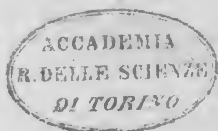

Fig. 16.


a
Fig. 12.
m
n


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32
Fig. 33.



Carte de la méridienne de Mallörn
Dégrés Centesim.
Dégrés Sexagés.
74° 0'
73° 0'
67° 0'
66° 0'
80'
70'
60'
50'
40'
30'
20'
10'
90'
π
G
l
Q
a
P
N
H
A
b
B
C
K
n
T
θ
k
q
f
h
F
E
H


ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO



